ANWENDUNGEN

DER

GRAPHISCHEN STATIK.

NACH

PROFESSOR DR. C. CULMANN

BEARBEITET

VON

W. RITTER,

PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH

Zweiter Teil.

Das Fachwerk.

Mit 119 Textfiguren und 6 Tafeln.

ZÜRICH
VERLAG VON MEYER & ZELLER
(Reimmann'sche Buchhandlung).
1890.

Druck von David Bürkli in Zürich.

Vorwort.

Der vorliegende zweite Teil der »Anwendungen der Graphischen Statik« beschäftigt sich mit einem Gegenstande aus dem Gebiete der Baustatik, welcher der zeichnerischen Behandlung zugänglich ist, wie wenig andere. Das beweisen schon die unzähligen Abhandlungen über die graphische Berechnung der Fachwerke, denen man in den technischen Zeitschriften begegnet. Der Grundgedanke, von welchem die Fachwerktheorie ausgeht, ist auch in der That so einfach und schlicht, dass zu seiner Erfassung nur ein geringes Mass geometrischer und statischer Vorbildung gehört, und einzelne Aufgaben wie zum Beispiel die Bestimmung der Stabspannungen nach *Cremona* können zu den elementarsten Aufgaben der graphischen Statik gerechnet werden.

Dies gilt jedoch nur so lange, als man sich an der Oberfläche der Fachwerktheorie bewegt. Dringt man tiefer in sie ein, versucht man, alle die zahlreichen Anforderungen zu befriedigen, welche die Fachwerke in ihrer gegenwärtig üblichen Ausführung an den Statiker stellen, so erkennt man bald, dass diese Theorie nicht nur einen ungeahnten Umfang annimmt, sondern auch eine aussergewöhnliche Thätigkeit des menschlichen Geistes erfordert.

Wie leicht kommt man scheinbar über die Wechselwirkung von Haupt- und Gegenstreben hinweg. In den meisten Lehrbüchern, welche die Berechnung der Fachwerke behandeln, wird diese so alltägliche Frage einfach übergangen oder mit zwei Worten abgethan, während sie sich bei sorgfältiger Prüfung als eine der sprödesten Aufgaben entpuppt, als eine Aufgabe, deren Lösung zur Zeit noch kaum als vollendet betrachtet werden darf.

Den Hauptbeitrag der Schwierigkeiten, welchen man in der Theorie des Fachwerkes begegnet, liefern jene Fragen, die nur unter Beiziehung der Gesetze der Elasticität rationell gelöst werden können



Nahezu die Hälfte des vorliegenden Buches ist diesen Fragen gewidmet; und doch kann von einer erschöpfenden Behandlung derselben noch lange keine Rede sein.

Gerne ginge der Theoretiker diesen Fragen aus dem Wege; dankbar sind alle Bestrebungen zu begrüssen, welche dahin zielen, jene verwickelten Theorien entbehrlich zu machen und die Fachwerke derart einzurichten, dass zu ihrer vollständigen Berechnung die Anfangsgründe der Statik ausreichen. Bestrebungen dieser Art sind manche zu verzeichnen. Wo sie durch Wort und Beispiel in fruchtbringender Weise auftreten, da darf man von »Schule machen« sprechen. Zur Zeit sind wir jedoch noch weit von dem Ideale entfernt, theoretisch einfache, klare Fachwerke bauen zu können. Dieses Ideal zu erreichen, wird so lange ein frommer Wunsch bleiben, als wir zur Herstellung unserer Bauwerke Stoffe von begrenzter Festigkeit verwenden. Wohl aber sind wir im Stande, uns jenem Ziele allmählig zu nähern. Dazu befähigt uns vor Allem dieses tiefere Eindringen in die noch dunkeln Gebiete, dieses intensive Bearbeiten der Fachwerktheorie, das die Bücher so umfangreich und häufig so ungeniessbar macht. Gerade dadurch werden wir in den Stand gesetzt, das Bessere vom Guten zu unterscheiden und unsere Bauweisen jener gesunden, nüchternen Einfachheit entgegen zu führen, welche das Vollkommene kennzeichnet. Man könnte sagen, dass jene tiefer gehenden Theorien sich selbst aus dem Wege räumen, dass sie um so überflüssiger werden, je mehr sie sich vervollkommnen. —

Das vorliegende Buch befasst sich seiner Ueberschrift entsprechend mit der graphischen Berechnung der Fachwerke. Nur vereinzelt kommen algebraische Entwicklungen im Texte vor. Man kann darüber verschiedener Ansicht sein, ob es zweckmässig ist, die analytische Rechnung in so weit gehender Weise auszuschliessen. Ohne Zweifel gewänne das Buch an Wert und Brauchbarkeit, wenn es auch über diejenigen Fragen der Fachwerkberechnung Aufschluss gäbe, die zur Zeit der zeichnerischen Behandlung unzugänglich sind, oder deren zeichnerische Lösung mehr Umstände macht als die rechnerische. Doch wie der Wert des Buches, so wäre auch sein Umfang gewachsen. Der Verfasser hielt es für richtiger, den Inhalt desselben mit seiner Aufschrift in Ueberein-

stimmung zu setzen. Nicht eine Theorie der Fachwerkbrücken wollte er schreiben, sondern eine Graphische Statik der Fachwerke, ein Buch, welches dasjenige in übersichtlicher, zusammenhängender Darstellung enthalten sollte, was die *Culmann*'sche Wissenschaft auf dem Gebiete der Fachwerktheorie zu leisten vermag.

Nach Vollendung des Buches hat der Verfasser den Eindruck gewonnen, als hätte er manchenorts die Genauigkeit in der Bestimmung der Ergebnisse zu weit getrieben oder doch in ungenügendem Masse darauf hingewiesen, wo und wie die Arbeit vereinfacht und abgekürzt werden könnte. Angesichts der Unsicherheit, in welcher wir uns hinsichtlich der Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der Baustoffe befinden, erscheint es in der That häufig überflüssig, ja lächerlich, die Berechnung der inneren Spannungen mit voller Schärfe durchzuführen. Zur Rechtfertigung darf jedoch darauf hingewiesen werden, dass an Lehrbüchern kein Mangel ist, welche den genaueren Verfahren aus dem Wege gehen und sich mit den bequemeren angenäherten, dafür aber oft ans Schablonenhafte streifenden Methoden zufrieden geben. Auch darf erwartet werden, dass der Leser gerade an dieses Werk, das den Namen des Schöpfers der graphischen Methoden an der Stirne trägt, höhere Anforderungen stellen wird. Das Buch wendet sich nicht an den, der in möglichst kurzer Zeit einige Rezepte zur Berechnung der Fachwerke kennen lernen will, sondern an den wissenschaftlich gebildeten, nachdenkenden Techniker, der in die Arbeitsweise und Leistungsfähigkeit seiner Bauwerke tiefer zu blicken wünscht, als es die alltäglichsten Bedürfnisse verlangen. Ein Solcher wird auch im Stande sein, von sich aus dasjenige abzustreifen, was für ihn unnützer Ballast ist, und die beschriebenen Verfahren so weit abzukürzen und zu vereinfachen, als es der jeweilige Zweck und die jeweilige Bedeutung seiner Bauwerke gestatten.

Uebrigens ist in diesem zweiten Teile, abweichend vom ersten, der Versuch gemacht worden, das Nebensächliche durch kleineren Druck zu kennzeichnen und dadurch den Leser in den Stand zu setzen, das Wesentliche von vorn herein als solches zu erkennen. —

Dem vor zwei Jahren erschienenen ersten Teile sind manche anerkennende Besprechungen zu Teil geworden. Vielfach wurde

hierbei die Verwendung der neueren Geometrie erwähnt und beurteilt. Während einige der Besprechungen in diesem Umstande einen besonderen Wert des Buches fanden, klang es bei anderen wie leiser Vorwurf durch, dass der Bearbeiter hierin seinem Meister gefolgt sei. Deutlicher, als der Unterzeichnete erwartet hatte, ging aus den gefallenen Bemerkungen hervor, wie wenig noch die Geometrie der Lage in deutschen Kreisen Wurzel gefasst hat. Man sträubt sich, anzuerkennen, dass dieser Zweig der Mathematik die naturgemässeste Hülfswissenschaft der graphischen Statik bildet. Man übersieht, welche Anregung und welchen Nutzen auch abgesehen davon die Methoden der neueren Geometrie gerade für den in räumlichen Vorstellungen sich bewegenden Techniker bieten. Wer sich Jahre lang ausschliesslich in der analytischen Denkweise bewegt hat, hält diese gerne für die einfachere und leichtere. Man wage einmal den Versuch und fange mit der projectivischen Geometrie parallel mit der analytischen schon auf der Mittelschule an; es ist kaum zu zweifeln, dass die Schüler sich alsdann ebenso leicht und ebenso sicher auf dem einen wie auf dem andern Boden werden bewegen lernen.

In dem vorliegenden Bande nimmt übrigens die neuere Geometrie nur eine bescheidene Stellung ein. Das Wesen der meisten Aufgaben der Fachwerktheorie bringt es mit sich, dass einfachere Hülfsmittel zu ihrer Bewältigung ausreichen. Nur bei einigen Nebenfragen sind die Begriffe der Projectivität und Harmonität zu Rate gezogen worden. —

Der Inhalt des Buches ist in sechs Kapitel abgeteilt. Der Schwerpunkt des Ganzen liegt in den beiden ersten derselben. Sie enthalten ungefähr dasjenige, was der Durchschnittstechniker zu wissen braucht und was in das regelmässige Programm einer technischen Hochschule gehört. Von den speziellen Fachwerken sind nur solche mit einer einzigen Oeffnung behandelt worden. Anfänglich lag der Plan vor, auch die *Gerber*'schen Gelenkträger und die Bogen mit drei Gelenken aufzunehmen. Diese Bauwerke gehören als statisch bestimmte Fachwerke ihrem inneren Wesen nach in den gegenwärtigen Teil. Hinsichtlich der praktischen Anwendung stehen sie jedoch den continuirlichen Fachwerken und den

statisch unbestimmten Bogen näher. Auch der reiche Stoff, den das Buch ohnedies schon bewältigen musste, liess es ratsamer erscheinen, diese beiden Fachwerksarten in spätere Teile zu verlegen.

Bekanntlich wird die zulässige Inanspruchnahme des Eisens vielfach von den Grenzen abhängig gemacht, zwischen welchen die Spannung hin und her schwankt. Um dieser neueren Berechnungsweise der Stabquerschnitte Rechnung zu tragen, sind in den durchgeführten Beispielen neben den grössten Stabkräften stets auch die kleinsten bestimmt worden. Die hierdurch verursachte Mehrarbeit ist nicht unbedeutend; man wird sie sich, wenn es sich blos um vorläufige Entwürfe oder um kleinere Bauwerke handelt, gern ersparen. Handelt es sich dagegen um Brücken mit grösserer Spannweite, so wird ein vorsichtiger Rechner bei der Bestimmung der Querschnittsabmessungen auch die untere Grenze der Beanspruchung in Betracht ziehen.

Die übrigen vier Kapitel können als Anhänge betrachtet werden. Im dritten Kapitel werden die elastischen Formänderungen der Fachwerke besprochen; es bildet das Gegenstück zu dem vierten Kapitel des ersten Teiles dieses Werkes. Wie dort so ist auch hier der Elasticitätsellipse ein breiter Platz eingeräumt worden. Wer einmal beim Erfassen des Wesens dieser Kurve die erste Schwierigkeit überwunden hat, der wird erkennen, dass sie für zahlreiche Zwecke, sowohl für die bei Brückenproben übliche Vorausberechnung der Durchbiegung, als namentlich für die Behandlung von Bogen und continuirlichen Fachwerken grosse Dienste leistet.

Im vierten Kapitel werden die statisch unbestimmten Fachwerke besprochen. Eine vollständige Behandlung dieses Gegenstandes hätte den Umfang des Buches ungebührlich vergrössert und war um so weniger am Platze, als der Gegenstand zu denen gehört, die sich der ausschliesslich zeichnerischen Behandlung entziehen. Es galt daher, aus dem reichhaltigen Stoffe das Nächstliegende, das für den Techniker Verwendbarste zu wählen.

Das fünfte Kapitel liesse sich aus dem Buche entfernen, ohne dass man letzteres deshalb der Lückenhaftigkeit zeihen könnte. Schon die Ueberschrift besagt, dass es sich hier um Kräftewirkungen zweiten Ranges handelt. Die Frage des Einflusses starrer Knoten-

punktsverbindungen hat jedoch schon so viele Köpfe beschäftigt und so viele Gemüter beunruhigt, dass es nicht passend schien, sie mit Stillschweigen zu übergehen, zumal sie sich auf zeichnerischem Wege so hübsch beantworten lässt.

Das letzte Kapitel enthält das Wesentlichste über die Berechnung räumlicher Fachwerke. Zahlreiche Nebenfragen, welche sich an die Betrachtung dieser Bauwerke knüpfen, sind blos angedeutet worden. Von einer vollständigen Theorie des räumlichen Fachwerkes sind wir gegenwärtig noch weit entfernt. —

Nach dem ursprünglichen Plane hätte das vorliegende Buch schon im vorigen Jahre erscheinen sollen. Verschiedene Umstände, die zum grössten Teil ausserhalb des Einflussbereiches des Verfassers lagen, haben die Vollendung stark verzögert. Die hierdurch gewährte Frist wurde zur besseren Sichtung und Ergänzung des Stoffes verwendet; die Verzögerung dürfte daher dem Ganzen nicht zum Schaden gereicht haben.

Herr Ingenieur *G. Mantel* hat mir durch die Ausführung von Kräfteplänen, durch das Lesen der Correcturbogen und durch manche nützliche Ratschläge bei der Herstellung des Buches wesentliche Dienste geleistet; dankbar sei an dieser Stelle seine allzeit bereite und selbstlose Mitwirkung anerkannt.

Zürich, im Juni 1890.

W. Ritter.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Theorie des Fachwerkes.

Zweites Kapitel.

Spezielle Fachwerke.

Drittes Kapitel.

Elastische Formänderungen.

Viertes Kapitel.

Statisch unbestimmte Fachwerke.

Fünftes Kapitel.

Die secundären Spannungen.

Sechstes Kapitel.

Räumliche Fachwerke.

Verzeichnis der Tafeln.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Theorie des Fachwerkes.

1. Definition des Fachwerkes.

Eine genaue und allgemein zutreffende Definition von dem zu geben, was man im Brückenbau ein «Fachwerk» nennt, ist in Anbetracht der mannigfaltigen Anordnungen und der verschiedenen Uebergangs- und entarteten Formen, welchen man in der Praxis begegnet, kaum möglich; doch kommt man der Wahrheit und namentlich der zur Zeit üblichen Bauweise sehr nahe, wenn man sagt:

Ein Fachwerk ist ein starres, aus geradlinigen Stäben zusammengesetztes und zum Tragen von Lasten bestimmtes Bauwerk.

Dass die Stäbe eines Fachwerkes geradlinig zu gestalten sind, folgt sowohl aus statischen als aus Gründen der Herstellung. Nur selten begegnet man krummlinigen Stäben, und stets ist die Krümmung in diesen Fällen eine ganz schwache. Die Bestimmung der inneren Kräfte erfährt dann eine kleine Abänderung. (Vgl. Nr. 46.)

In der Regel greifen die das Fachwerk belastenden Kräfte an den Verbindungspunkten, den sogenannnten Knotenpunkten an. Davon macht selbstverständlich das eigene Gewicht des Fachwerkes eine Ausnahme; doch begeht man in den meisten Fällen nur einen verschwindend kleinen Fehler, wenn man das Gewicht jedes Stabes auf dessen Endpunkte verteilt denkt. Fachwerke, welche ausserhalb der Knotenpunkte Verkehrslasten aufzunehmen haben, sind im Allgemeinen als fehlerhaft zu bezeichnen.

Die im Nachfolgenden entwickelte Theorie setzt ferner voraus, dass die das Fachwerk bildenden Stäbe an ihren Endpunkten durch reibungslose Gelenke unter sich verbunden seien. In der Wirklichkeit wird diese Bedingung niemals erfüllt. Es ist daher

kaum passend, diese Eigenschaft als notwendiges Erfordernis in die Definition aufzunehmen. Freilich wird die Theorie des Fachwerks nur dadurch verhältnismässig einfach, dass man ungehinderte Beweglichkeit der Knotenpunkte voraussetzt und damit implicite festsetzt, dass die in den Stäben wirkenden Kräfte durch die Gelenkmittelpunkte gehen. Doch lehrt die genauere Prüfung dieser Angelegenheit, dass man die Ergebnisse der üblichen Fachwerktheorie als eine, meistens genügende Annäherung und die Folgen der Gelenkreibung oder der völlig starren Verbindung (welche im fünften Kapitel untersucht werden sollen) als untergeordnete Erscheinungen betrachten darf.

Bei gewissen Aufgaben, vor Allem bei der Bestimmung der Auflagerdrücke, welche sich bei gegebener Belastung einstellen, wird das Fachwerk einfach als ein Balken angesehen. Erst bei der Ermittlung der inneren Kräfte gewinnt der Unterschied zwischen dem «vollwandigen» und dem «gegliederten» Balken Bedeutung. Diese Gliederung des Trägers bedingt die ausserordentliche Zweckmässigkeit des Fachwerkes, weil sie gestattet, die Stärke der einzelnen Glieder den wirkenden Kräften möglichst anzupassen.

Hält man in der Brückenbaukunst an der selbstverständlichen Regel fest, einem vorgeschriebenen Zwecke mit möglichst wenig Material zu genügen, so wird man durch die Untersuchung der im Innern eines vollwandigen Balkens wirkenden Kräfte*) dahin gedrängt, diesen Balken unter Umständen in einen gegliederten zu verwandeln. Findet man zunächst, dass in einem auf Biegung beanspruchten Balken von rechteckigem Querschnitte die inneren Spannungen in den obersten und untersten Teilen des Querschnittes weit überwiegen, so wird man bestrebt sein, den mittleren, schlecht ausgenützten Teil zu beschränken und statt des Rechteckes die Doppel-T-Form anzuwenden, vorausgesetzt natürlich, dass diese Aenderung nicht etwa (wie beim Holze) mit Mehrkosten verbunden ist. Erkennt man sodann, dass die Zug- und Druckkurven eines Doppel-T-Trägers (I. Teil, Tafel 3) im Kopf und Fuss sich dicht zusammendrängen, im Steg dagegen ein weitmaschiges Netz von nahezu geraden Linien bilden, so erscheint es zweckmässig, den anfänglich vollwandigen Steg durch zwei Systeme von sich kreuzenden Stäben zu ersetzen; dadurch gelangt man ohne Weiteres auf das Fachwerk. Freilich ist hier wie an andern Orten die Praxis der Theorie vorangeeilt und hat Fachwerke gebaut, lange bevor es der theoretischen Untersuchung gelang, deren hervorragende Vorteile nachzuweisen.

Die Stäbe eines Fachwerkes teilt man je nach ihrer Wirkungsweise in Zug- und Druckstäbe ein. Diejenigen Stäbe, welche

*) Siehe den I. Teil dieses Werkes.

das Fachwerk nach aussen begrenzen, heissen Gurtungsstäbe, die davon eingeschlossenen Streben oder Füllungsglieder; erstere bilden die beiden von einem Auflager zum andern reichenden, geradlinigen oder gebrochenen, Gurtungen oder Streckbäume, während letztere im Allgemeinen eine zickzackförmige Linie bilden. Zieht man noch die Wirkungsweise der verschiedenen Stäbe in Betracht, so ergeben sich ganz von selbst die Benennungen Zuggurtung, Druckgurtung, Zugbaum, Druckbaum, Zugstrebe und Druckstrebe.

Je nach ihrer Richtung teilt man die Streben auch häufig in Verticalen und Diagonalen ein. Häufig werden ferner die gezogenen Streben Bänder, die gedrückten Pfosten oder Ständer genannt, letztere namentlich dann, wenn sie zugleich lotrecht stehen. Vielfach sind zwei Streben so beschaffen, dass sie sich gegenseitig ersetzen, derart, dass von beiden stets nur die eine zur Zeit thätig ist; man spricht in diesem Falle von Haupt- und Gegenstrebe. (S. Nr. 10.) Ausdrücke wie Hängeisen, Hängsäule etc. kommen mehr vereinzelt vor und erklären sich im betreffenden Falle von selbst.

2. Einteilung der Fachwerke.

Die Stäbe eines Fachwerkes können entweder alle in einer Ebene liegen oder im Raume verteilt sein. Demgemäss sprechen wir von ebenen und von räumlichen Fachwerken. Letztere finden bei Kuppeln, Brückenpfeilern etc. praktische Verwendung und sollen im letzten Kapitel dieses Buches berücksichtigt werden. Im Uebrigen beschäftigen wir uns ausschliesslich mit den weit wichtigeren ebenen Fachwerken. Dass bei letzteren auch zugleich sämtliche äusseren Kräfte in derselben Ebene liegen müssen, wenn das Fachwerk in richtiger Weise wirken soll, braucht kaum besonders betont zu werden.

Jedes Fachwerk besitzt eine bestimmte Anzahl Stäbe und eine bestimmte Anzahl Knotenpunkte; von grosser Bedeutung ist nun die Frage, wie viele Stäbe nötig sind, um eine gegebene Anzahl Punkte zu einem starren Systeme zu verbinden und dadurch die Construction zu befähigen, den verschiedenartigsten Belastungen mit Sicherheit zu widerstehen.

Um diese Frage beantworten zu können, muss man wissen, in welcher Weise das Fachwerk unterstützt oder aufgelagert ist.

Die meisten unserer ausgeführten Fachwerke liegen an ihren beiden Endpunkten auf und zwar in der Regel derart, dass der eine Auflagerpunkt fest ist, während der andere sich in wagrechter Richtung ein wenig verschieben kann. Um jedoch die gestellte Aufgabe allgemein zu lösen, denken wir uns zunächst, das Fachwerk sei derart aufgelagert, dass beliebig viele seiner Knotenpunkte genötigt sind, beständig auf gegebenen festen Linien oder «Bahnen» zu bleiben, längs welchen sie sich ohne Widerstand bewegen können. Man kann sich an diesen Punkten etwa Rollenlager vorstellen. (Unter diesen Bewegungen einzelner Punkte hat man sich nur solche zu denken, die infolge elastischer Formänderungen oder infolge von Temperaturschwankungen entstehen und daher im Vergleich zur Grösse des Fachwerkes verschwindend klein sind.)

An jedem der genannten Punkte wird das Fachwerk auf seine Unterlage einen Druck ausüben und einen eben so grossen Gegendruck erfahren. Dieser Auflager- oder Stützendruck muss aber notwendig auf der gegebenen Bahn senkrecht stehen; denn seitliche Componenten würden den Punkt so lange verschieben, bis der Druck die normale Lage angenommen hätte.

Von diesen Auflagerstellen können auch einzelne zu Paaren vereinigt werden; weisen wir einem Knotenpunkte zwei Auflagerbahnen zu, das heisst fesseln wir ihn an zwei (sich kreuzende) Bahnen, so kann er sich offenbar in keiner Weise verschieben; feste Auflagerpunkte sind daher als Knoten mit doppelter Auflagerbahn anzusehen.

Ein ebenes Fachwerk muss wenigstens drei Auflagerbahnen besitzen, wenn es verschiedenartige Belastungen tragen soll. Denn bekanntlich lässt sich eine Kraft eindeutig in drei Seitenkräfte zerlegen, die in drei gegebenen Geraden liegen, vorausgesetzt, dass diese Geraden nicht durch einen und denselben Punkt gehen. Ist daher das Fachwerk mit drei seiner Knotenpunkte an Auflagerbahnen gebunden, deren Normalen sich nicht in dem nämlichen Punkte schneiden, so lassen sich für jede Belastung drei bestimmte Auflagerdrücke finden, die mit der Belastung im Gleichgewichte stehen. Bewegen sich dagegen nur zwei Knotenpunkte auf Bahnen, so ist es im Allgemeinen unmöglich, Gleichgewicht herzustellen.

Nehmen wir nun an, das Fachwerk besitze k Knotenpunkte

und s Stäbe, und es seien a Knotenpunkte an Auflagerbahnen gebunden. Dann haben wir bei gegebener Belastung die a Auflagerdrücke und die s Stabkräfte als Unbekannte anzusehen. Um sie zu bestimmen, machen wir von dem bekannten Satze der Statik Gebrauch, dass die an jedem Knoten zusammentreffenden (inneren und äusseren) Kräfte sich das Gleichgewicht halten müssen. Da dieser Gleichgewichtszustand nur möglich ist, wenn sowohl die wagrechten als auch die lotrechten Seitenkräfte sich aufheben, so liefert uns jeder Knotenpunkt zwei Gleichgewichtsbedingungen. Diesen stehen $s + a$ unbekannte Grössen gegenüber. Daraus folgt der Satz: Sollen die Auflagerdrücke und die Stabkräfte ausschliesslich mit Hülfe der statischen Gesetze bestimmt werden, so muss die doppelte Zahl der Knotenpunkte gleich der Zahl der Stäbe, vermehrt um die Zahl der Auflagerbahnen ($2k = s + a$) sein.

Ein Fachwerk, bei dem die unbekannten Kräfte unter Anwendung der Gleichgewichtsgesetze, das heisst ohne die Zuhülfenahme von anderen Erwägungen oder Hypothesen gefunden werden können, heisst statisch bestimmt. Wir sehen, dass bei einem statisch bestimmten Fachwerke stets $2k = s + a$ sein muss.

Leider lässt sich dieser Satz nicht einfach umkehren. Ein Fachwerk, bei dem obige Bedingung erfüllt wird, braucht nicht notwendig statisch bestimmt zu sein. Die Figuren 1 und 2 stellen zwei Fachwerke dar, deren jedes 14 Knoten, 25 Stäbe und 3 Auflagerbahnen (ein festes und ein bewegliches Auflager) besitzt; obige Bedingung ist daher erfüllt. Während aber das Fachwerk der Figur 1 statisch bestimmt und starr ist, würde das andere (gelenkförmige Knoten vorausgesetzt) unter dem Einfluss von Belastungen einstürzen, weil ihm im vierten Fache die Diagonale fehlt. Es ist ein unstabiles und für Bauzwecke unbrauchbares Fachwerk. Um die Frage, ob eine Construction statisch bestimmt sei oder nicht, in jedem Falle vollkommen sicher beantworten zu können, gibt es zur Zeit nur ein umständliches, auf der Berechnung einer Determinante beruhendes Mittel. Ein geübtes Auge wird es jedoch den meisten Fachwerksformen sofort ansehen, ob ihnen ein notwendiges Glied fehlt oder nicht, so dass das oben abgeleitete Kriterium in der Praxis fast immer ausreicht.

Fig. 1.

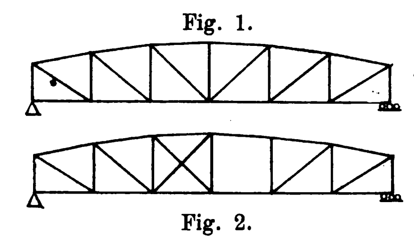


Fig. 2.

Besitzt ein Fachwerk mehr als $2k - a$ Stäbe (und gehört es nicht etwa zu den fehlerhaften, unstabilen Bauwerken), so nenn

man es statisch unbestimmt. In diesem Falle genügen die Gesetze des Gleichgewichtes nicht mehr, um die inneren Kräfte zu ermitteln, sondern wir müssen uns nach anderweitigen Anhaltspunkten umsehen. Vielfach reichen hier gewisse annehmbare Hypothesen aus; genaue und sichere Auskunft verschafft uns jedoch nur die Bestimmung und Berücksichtigung der elastischen Formänderungen. Im vierten Kapitel dieses Teiles werden wir diese Beziehungen entwickeln und verwerten. Im gegenwärtigen Kapitel jedoch, sowie in den beiden folgenden beschäftigen wir uns ausschliesslich mit den statisch bestimmten Fachwerken.

Die statisch bestimmten Fachwerke besitzen neben dem Vorteil der leichteren und einfacheren Berechnungsweise auch noch den, dass sie von den Schwankungen der Temperatur unberührt bleiben, das heisst, dass die Stabkräfte sich nicht ändern, falls sich sämtliche Stäbe oder auch nur einzelne infolge von Erwärmung ausdehnen. Denn wenn die inneren Kräfte und die Auflagerdrücke derart bestimmt sind, dass sie in jedem Knotenpunkte mit den gegebenen Belastungen im Gleichgewichte stehen, so bleibt dieser Gleichgewichtszustand auch nach der Erwärmung genau derselbe (vorausgesetzt, dass die Belastungen sich nicht ändern). Die Annahme, dass die unbekannten Kräfte unverändert bleiben, führt daher stets zu einer richtigen Lösung der Aufgabe; da aber nur eine Lösung möglich ist, so ist unsere Annahme richtig. Anders liegen dagegen die Verhältnisse bei statisch unbestimmten Fachwerken, weil bei diesen die elastischen Formänderungen und infolge dessen auch die aus Temperatureinflüssen entspringenden Längenveränderungen der Stäbe mitsprechen.

Aus demselben Grunde können (immer unter der Voraussetzung reibungsloser Gelenke) in einem statisch bestimmten Fachwerke auch keine Eigenspannungen, von der Herstellung herrührende, beabsichtigte oder unbeabsichtigte innere Kräfte, vorkommen.

Aus diesen Umständen zu schliessen, dass statisch unbestimmte Fachwerke überhaupt unvorteilhafter oder gar verwerflich seien, wäre indessen voreilig; sie besitzen neben ihren Nachteilen in manchen Fällen wieder Vorteile, die jene reichlich aufwiegen.

Die beiden Hauptklassen der Fachwerke teilt man zweckmässig noch weiter ein, und zwar die statisch bestimmten nach der Zahl der Auflagerbahnen, die statisch unbestimmten nach der Zahl der überflüssigen Stäbe.

Von den drei Auflagerbahnen, welche ein Fachwerkträger zur sicheren Unterstützung nötig hat, werden in der Praxis stets zwei vereinigt, so dass der Träger ein festes und ein bewegliches Auflager erhält. Hieher gehören die Brückenfachwerke und Dachstühle mit einer Oeffnung. Sie bilden die weitaus reichste Klasse von Fachwerken, und wir werden sie ihrer Wichtigkeit wegen mit

ganz besonderer Aufmerksamkeit betrachten müssen. Je nach der Form der Gurtungen und der Anordnung der Streben gibt man ihnen noch verschiedene Benennungen. (Vgl. das 2. Kapitel.)

Statisch bestimmte Fachwerke mit vier Auflagerbahnen besitzen wir im *Gerber*'schen Gelenkträger mit zwei Oeffnungen und in dem Bogen mit drei Gelenken, Formen, die in späteren Teilen dieses Werkes Berücksichtigung finden sollen. Ersterer hat ein festes und zwei bewegliche Auflager; bei letzterem sind die vier Bahnen durch zwei feste Auflager ersetzt. Zu den Fachwerken mit fünf Bahnen gehört der über drei Oeffnungen gespannte *Gerber*'sche Träger; dabei werden zwei Bahnen zusammengezogen, die übrigen drei einzeln angebracht. Fachwerke mit sechs und mehr Auflagerbahnen sind unseres Wissens bis dahin nicht gebaut worden.

Für gewisse Zwecke ist es ratsam, noch einen Unterschied zwischen „regelmässigen" und „unregelmässigen" Fachwerken zu machen. Erstere kann man sich durch fortschreitendes Aneinanderreihen von Dreiecken entstanden denken, während letztere eine oder mehrere Abweichungen von dieser Regel aufweisen. Beispiele von regelmässigen Fachwerken zeigen die Textfiguren 1, 3, 27, 30, 37—40 u. a. Beispiele von unregelmässigen die Figuren 13 und 14. Auch Figur 5 auf der Tafel 4 gehört zu letzteren, weil das grosse Mitteldreieck von 5 Stäben begrenzt wird.

Statisch unbestimmte Fachwerke treten uns zunächst in den fachwerkförmigen Bogen mit weniger als drei Gelenken entgegen. Bogen mit zwei Gelenken haben einen, Bogen mit einem Gelenke zwei, Bogen ohne Gelenke drei Stäbe mehr, als zur Stabilität nötig wären. Sodann gehören alle continuirlichen Fachwerke zu den statisch unbestimmten. Brücken mit zwei Oeffnungen haben (einfachen Strebenzug vorausgesetzt) einen überflüssigen Stab; durch Entfernen eines Stabes oder auch eines der beweglichen Auflager würde die Construction statisch bestimmt. Mit jedem neuen Auflager nimmt die Zahl der Unbestimmtheiten um eine zu.

Endlich müssen wir die meisten Fachwerke mit mehrfachem Strebenzug (die sogenannten « mehrteiligen » Fachwerke) zu den statisch unbestimmten Constructionen zählen. Bringen wir in dem Fachwerk der Figur 1 (Seite 5) einen neuen Diagonalstab an, so wird die Construction sofort statisch unbestimmt; erhält jedes Fach zwei sich kreuzende Diagonalen, so hat das Fachwerk sechs überflüssige Stäbe. Auch bei den bogenförmigen und continuirlichen Fachwerken wird die Unbestimmtheit vielfach durch Anbringen von sich kreuzenden Streben noch erhöht. Die Zahl der überflüssigen

Glieder steigt hierbei oft sehr hoch an, und die statische Berechnung einer solchen Construction wäre ausserordentlich mühsam, wenn man nicht zu gewissen, naheliegenden Hypothesen seine Zuflucht nehmen könnte. (Vgl. das 4. Kapitel, Nr. 36.)

Eine Ausnahme von dem soeben Gesagten bilden die schon früher (Seite 3) erwähnten Gegenstreben, da sie zufolge ihrer Querschnittsform oder infolge ihrer Befestigungsweise abwechselnd mit den Hauptstreben ausser Thätigkeit gesetzt werden, mit andern Worten nicht als selbständige, sondern nur als Ersatzstäbe anzusehen sind. So rechnet man die Fachwerke der Tafeln 1 bis 3 zu den statisch bestimmten Constructionen, trotzdem die Zahl der vorhandenen Stäbe überall grösser als $2\,k - 3$ ist.

3. Bestimmung der inneren Kräfte. Das Cremona'sche Verfahren.

Man kann im Allgemeinen drei Methoden zur Bestimmung der inneren Kräfte unterscheiden. Die erste beruht auf den interessanten Entwickelungen des Professors *L. Cremona* in seinem Werkchen *„Le figure reciproche nella Statica Grafica“* und wird deshalb meist das *Cremona'*sche Verfahren genannt. Das zu berechnende Fachwerk und der dazu gehörende Kräfteplan werden dort als die Projectionen zweier Polyeder angesehen, deren Kanten sich als reciproke Elemente eines Nullsystems entsprechen. (Vgl. Culmanns Graph. Statik, 2. Aufl. Nr. 56 u. 82.) Das Verfahren, welches aus diesen Betrachtungen entspringt, ist indessen so einfach, dass es auch ohne Kenntnis seiner Ableitung leicht begriffen und angewandt werden kann.

Man bildet zunächst aus den gegebenen, im Gleichgewichte stehenden äusseren Kräften ein geschlossenes Polygon und zwar so, dass die Kräfte sich in derselben Ordnung aneinander reihen, wie sie dem Umfange des Fachwerkes entlang aufeinander folgen. Hierauf werden durch fortschreitendes Zerlegen die Stabkräfte gefunden. Dabei beginnt man stets an einem Ende des Fachwerkes oder richtiger gesagt an einem Knotenpunkte, an dem nur zwei Stäbe zusammenstossen, und bildet, von Punkt zu Punkt weiter gehend, für jeden Knoten ein geschlossenes Polygon, dessen Seiten die an diesem Punkte sich treffenden Kräfte darstellen.

Am klarsten und einfachsten werden diese Kräftepläne — und das ist eines der praktischen Ergebnisse der *Cremona'*schen Arbeit —

wenn bei deren Bildung dafür Sorge getragen wird, dass jede Gurtungskraft durch den Trennungspunkt derjenigen beiden äusseren Kräfte geht, welche an den Endpunkten des betreffenden Gurtungsstabes angreifen. In diesem Falle entspricht jedem dreieckförmigen Felde des Fachwerkes ein Punkt im Kräfteplan, durch welchen die drei betreffenden Kräfte gehen, und umgekehrt jedem Knotenpunkte des Fachwerkes ein geschlossenes Polygon im Kräfteplane, welches aus den am Knoten zusammenstossenden Kräften besteht. Wird nach dieser Regel vorgegangen, so kommt im Kräfteplane jede Kraft nur einmal vor und Parallelverschiebungen von Kräften werden niemals nötig.

Es muss bemerkt werden, dass diese Regel im Allgemeinen nur dann eingehalten werden kann, wenn das Fachwerk regelmässig ist, das heisst wenn es aus aneinander gereihten Dreiecken besteht. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so geht die elegante reciproke Beziehung zwischen beiden Figuren gewöhnlich verloren, und häufig ist man gezwungen, im Kräfteplane einzelne Kräfte parallel zu verschieben, das heisst zweimal aufzutragen, um die Gleichgewichtspolygone zu erhalten. (Vgl. Nr. 36.)

Aus dem Richtungssinne der äusseren Kräfte lässt sich sodann auch der Sinn der inneren Kräfte bestimmen. Man betrachtet zu diesem Zwecke entweder jede äussere Kraft als Mittelkraft der vom gleichen Knoten ausgehenden Stabkräfte, oder man zeichnet, was übersichtlicher ist, die Pfeile derart ein, dass an jedem Knotenpunkte ein Gleichgewichtssystem entsteht. Die Stabkräfte haben selbstverständlich keine ausgesprochene Richtung, sondern wirken in entgegengesetzter Richtung, je nachdem man den einen oder den andern Endpunkt als Angriffspunkt ansieht. Im Kräfteplan erhält daher jede innere Kraft zwei Pfeile. Ueberträgt man diese Pfeile in das Fachwerksnetz und zwar je in die Nähe der betreffenden Knotenpunkte, so sind diejenigen Stäbe gezogen, deren Pfeile von den beiden Endpunkten weg-, also gegeneinander laufen, und diejenigen gedrückt, deren Pfeile die umgekehrte Richtung haben.

Ein einfaches Beispiel möge zur näheren Erläuterung des vorstehend Gesagten dienen.

Die Figur 3 stellt das Gerippe des zu berechnenden Fachwerkes und die als gegeben zu betrachtenden äusseren Kräfte, die Figur 4 den *Cremona*'schen Kräfteplan dar. In letzterem sind zunächst die äusseren, mit 1 bis 9 bezeichneten Kräfte zu einem Polygon zusammengesetzt worden. Dieses Polygon muss, da zwischen den äusseren Kräften stets Gleichgewicht herrscht, geschlossen sein.

(Ausserdem müsste sich das Seilpolygon, wenn man es zeichnete, schliessen.) Nun zerlegt man, im Knotenpunkte 1 beginnend, die Kraft 1 nach den Richtungen 1 2 und 1 9, wobei man dafür sorgt. dass die Kraft 1 2 im Kräfteplan durch den Trennungspunkt der Kräfte 1 und 2, die Kraft 1 9 dagegen durch den Schnittpunkt der Kräfte 1 und 9 geht. Hierauf bringt man die am zweiten Knotenpunkte zusammenstossenden Kräfte zum Gleichgewicht; da man die Kräfte 1 2 und 2 schon kennt, so findet man die neuen Kräfte 2 3 und 2 9 durch Ziehen von zwei Parallelen zu den betreffenden Stabrichtungen. Zum Knoten 9 übergehend bestimmt man, wiederum durch zwei parallele Linien, die Kräfte 9 3 und 9 8. Auf diese Weise von Knoten zu Knoten weiterschreitend, findet man mit leichter Mühe die Grösse sämtlicher inneren Kräfte.

Fig. 3.

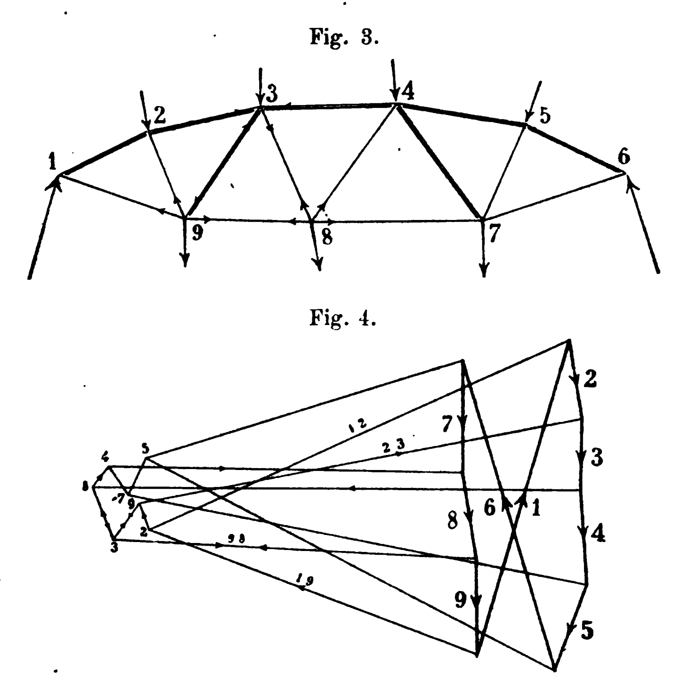


Fig. 4.

Um den Sinn dieser Kräfte zu bestimmen, setzt man (Fig. 4) in den sich bildenden kleinen Polygonen die Pfeile ein und überträgt sie in die Figur 3; es ist dies für die Knoten 3, 8 und 9 geschehen. Dann erkennt man, dass die Stäbe 2 3, 3 4 und 3 9 gedrückt, die Stäbe 1 9 und 2 9, sowie alle bei 8 sich treffenden Stäbe gezogen sind. Um diesen Wirkungssinn zu verdeutlichen,

haben wir in der Figur 3 die gedrückten Stäbe mit einem Doppelstrich versehen.

Bei unregelmässigen Fachwerken wird der hier beschriebene Weg gewöhnlich dadurch gesperrt, dass man unvermeidlich auf Knotenpunkte stösst, an denen mehr als zwei unbekannte Stabkräfte zusammentreffen. Oft führt in diesem Falle ein kleiner Umweg zum Ziele, indem es gelingt, eine der Stabkräfte dadurch zu bestimmen, dass man die an einem späteren Knotenpunkte zusammenstossenden Kräfte ins Gleichgewicht bringt. (Vgl. die Behandlung des mehrfachen Polonceau-Dachstuhles, Nr. 22 und Tafel 4_{5-8}.)

Es kann auch der Fall eintreten, dass am ganzen Fachwerke kein Knotenpunkt besteht, an dem sich nur zwei Stäbe vereinigen. Hier muss im Allgemeinen ein indirecter Weg eingeschlagen werden. Man wählt eine der Stabkräfte zunächst willkürlich und bestimmt nach dem *Cremona'*schen Verfahren die benachbarten Kräfte so weit, bis man auf einen Widerspruch stösst. Hierauf ändert man die angenommene Kraft derart, dass dieser Widerspruch verschwindet. Da sich die Kraftepläne hierbei nur linear ändern, so gelangt man durch zweimalige Wiederholung des Verfahrens und eine kleine Hülfsconstruction stets zu den richtigen Werten.

Das einfachste Beispiel dieser Art bietet das durch die Figur 5 dargestellte Fachwerk. Es besitzt, wie man sieht, nur Knotenpunkte mit 3 Stäben. Im Uebrigen ist es statisch bestimmt, da es 6 Knotenpunkte und 9 Stäbe zählt.

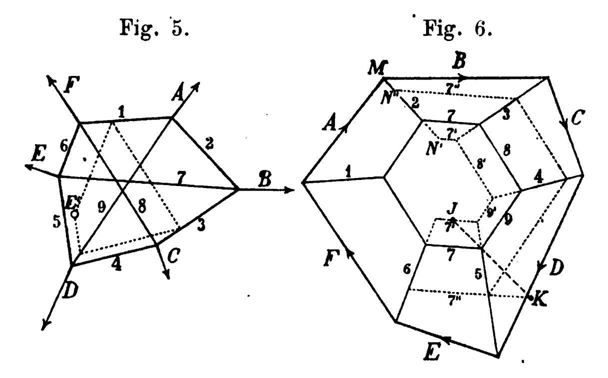


Fig. 5. Fig. 6.

Wir wollen nun annehmen, es seien die sechs angreifenden Kräfte A bis F gegeben und es sollen die neun Stabkräfte gefunden werden. (Zwischen den gegebenen Kräften muss natürlich Gleichgewicht bestehen.) Dann wählen wir beispielsweise die Stabkraft 2 zunächst beliebig gleich MN' (Figur 6), setzen sie mit der Kraft B zusammen und zerlegen die Mittelkraft nach den Stabrichtungen 3 und 7'. Hierauf verbinden wir 3 mit C und zerlegen nach 4 und 8'. In gleicher Weise bestimmen wir aus 4 und D die Kräfte 5 und 9' und aus 5 und E die Kräfte 6 und 7'. Nun zeigt sich der Widerspruch, indem die beiden Wege zu verschiedenen Kräften 7' geführt haben. Wir ändern somit die Anfangskraft 2, machen sie beispielsweise gleich MN'' und führen die ganze Arbeit nochmals durch; dabei gelangen wir auf die beiden, wiederum ungleichen Kräfte 7''.

Nun liegen aber die Kräfte 7′ und 7″ auf entsprechenden Strahlen von ähnlichen parallelen Büscheln, und da sie von geraden Linien begrenzt werden, ändern sie sich linear. Ueberträgt man daher die beiden oberen 7′ und 7″ mit dem Zirkel auf die untern, und verbindet die gefundenen Punkte J und K, so wird hiedurch die richtige Kraft 7 abgeschnitten. Die Ermittlung der übrigen Kräfte ist hierauf eine einfache Sache. (Ein kürzerer Weg zur Bestimmung dieser Kräfte soll später, Nr. 6, gezeigt werden.)

Die Lösung dieser Aufgabe wird unbestimmt, wenn JK in der Figur 6 mit der Richtungslinie der Kraft 5 zusammenfällt; dann können die Stabkräfte auf unendlich viele Arten den angreifenden Kräften das Gleichgewicht halten. Welche dieser Arten die richtige ist, kann nur durch Berücksichtigung der elastischen Formänderungen entschieden werden.

Kommt aber JK parallel zur Kraft 5 zu liegen, ohne sich mit ihr zu decken, so lässt die Aufgabe keine befriedigende Lösung zu. (Unendlich grosse Kräfte sind der Natur der Sache nach ausgeschlossen.) Das Fachwerk ist in diesem Falle kein starres, sondern ein bewegliches und kann die äusseren Kräfte erst tragen, nachdem es sich ein wenig deformirt hat.

Dieser besondere Fall lässt sich von vornherein daran erkennen, dass die sechs Knotenpunkte des Fachwerkes auf einem Kegelschnitte liegen. Er tritt nämlich ein, wenn sich die beiden Kräfte 7 bei einer Aenderung der Kraft 2 um gleich viel ändern, oder, was dasselbe ist, wenn unter Weglassung der angreifenden Kräfte B, C, D und E aus der Kraft P_2 gleiche Kräfte P_7 erhalten werden. In diesem Falle müssen, wie sich zeigen lässt, die Schnittpunkte der Linienpaare 2 8, 7 4 und 6 9 auf einer Geraden liegen. Dann aber ist diese Gerade nichts anderes als die *Pascal*-Linie des einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseckes 2 7 6 8 4 9.

Rascher lässt sich dieses Ergebnis mit Hülfe kinematischer Erwägungen nachweisen.

Betrachtet man die Stäbe 1, 2, 3 und 8 als ein Gelenkviereck und hält den Stab 1 fest, so dreht sich der Stab 3 bei einer unendlich kleinen Formänderung des Viereckes um den Schnittpunkt von 2 und 8; denn die Ecke B bewegt sich hierbei senkrecht zur Richtung des Stabes 2 und die Ecke C senkrecht zur Richtung des Stabes 8. Der Schnittpunkt der Stäbe 2 und 8 bildet daher das Momentancentrum für die Bewegung des Stabes 3. Sieht man gleicherweise die Stäbe 3, 4, 5 und 7 als ein Gelenkviereck an, so dreht sich der Stab 5, falls der Stab 3 festgehalten wird, um den Schnittpunkt von 4 und 7. Vereinigt man beide Bewegungen, so vollzieht der Stab 5 gegenüber dem Stabe 1 eine Drehung um einen Punkt, der auf der Geraden (2 8) (4 7) liegt. Die Stäbe 1 und 5 sind aber noch durch 6 und 9 miteinander verbunden; eine Beweglichkeit ist daher nur möglich, wenn die Punkte (2 8), (4 7) und (6 9) auf einer Geraden liegen. (Vgl. Prof. Dr. *Grüblers* Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerkes in der Riga'schen Industrie-Ztg. 1887.)

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass es Fachwerke geben kann, welche die notwendige Zahl von Stäben besitzen und doch nicht starr, sondern bis zu einem gewissen Grade verbiegbar sind. Indessen vermeidet die Praxis solche Formen meistens mit geübtem Blick, und ein weiteres Eingehen auf dieselben böte fast nur theoretisches Interesse.

4. Das Culmann'sche Schnittverfahren.

Das *Cremona*'sche Verfahren eignet sich zur Bestimmung der inneren Kräfte ganz vorzüglich da, wo man sämtliche Stabkräfte kennen will, die von einer bestimmten Belastung herrühren, also vor Allem zur Bestimmung der vom Eigengewichte erzeugten Spannungen. Sodann findet es mit Vorteil in denjenigen Fällen Verwendung, wo nur eine einzige Belastungsart vorkommt (bei den meisten Dachstühlen, siehe Nr. 20—22). Auch zur Bestimmung der bei Bogenbrücken von Temperaturschwankungen erzeugten Spannungen wird in der Regel ein *Cremona*'scher Kräfteplan gezeichnet. Wo es sich aber darum handelt, nur einige wenige oder nur eine einzige Stabkraft zu finden, die sich bei einer gegebenen Belastung einstellt, da wird obige Methode zu umständlich; wir wenden in diesem Falle besser das sogenannte Schnittverfahren an. (In der ersten Ausgabe von Culmanns Graph. Statik ist dieses Verfahren beinahe ausschliesslich zur Verwendung gelangt und wird deshalb auch zuweilen das *Culmann*'sche genannt.)

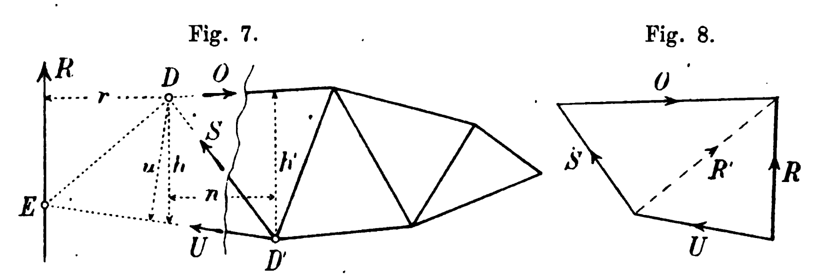
Teilt man den Fachwerkträger durch einen Querschnitt in zwei Teile, so ist die Mittelkraft der am linken Teile angreifenden äusseren Kräfte gleichbedeutend mit der Mittelkraft der in den durchgeschnittenen Stäben wirkenden Kräfte; denn beide Kräftegruppen halten die am rechten Fachwerkteile angreifenden äusseren Kräfte im Gleichgewicht. Schneidet man nun das Fachwerk derart, dass der Schnitt drei Stäbe trifft, so findet man die in ihnen wirkenden Kräfte dadurch, dass man die Mittelkraft der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräfte in drei Seitenkräfte zerlegt, welche in den drei Stabrichtungen liegen. Diese Aufgabe ist stets und zwar eindeutig lösbar, vorausgesetzt, dass die drei Richtungen nicht durch einen und denselben Punkt gehen, eine Bedingung, welche bei richtigen Fachwerken immer erfüllt ist.

Die Aufgabe, welche uns hiernach beim Schnittverfahren fortwährend entgegentritt, lässt sich auf zeichnerischem Wege leicht lösen; sie gehört bekanntlich zu den elementarsten Aufgaben der graphischen Statik. Der grösseren Klarheit und Vollständigkeit wegen haben wir die Lösung indessen durch die Figuren 7 und 8 noch verdeutlicht.

Es seien U, O und S die drei zu bestimmenden Stabkräfte und

R die gegebene Mittelkraft der links vom Schnitt angreifenden äusseren Kräfte. Dann bringt man zuerst die Kraft R mit einer der drei gesuchten Kräfte, beispielsweise mit U, zum Schnitt und zerlegt sie in zwei Seitenkräfte, von denen die eine mit U zusammenfällt, während die andere, R', durch den Schnittpunkt D von O und S geht; sodann zerlegt man die zweite Seitenkraft noch weiter in die Kräfte O und S.

Fig. 7. Fig. 8.



In der Figur 8 ist diese Zerlegung ausgeführt; eine nähere Erläuterung derselben dürfte überflüssig sein.

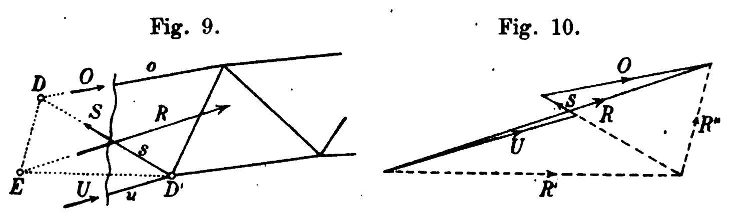
Ueberträgt man die Pfeile der drei Stabkräfte nach der Figur 7, so erkennt man, dass die untere Gurtung und die Strebe auf Zug, die obere Gurtung auf Druck in Anspruch genommen werden.

Genau zu denselben Ergebnissen gelangt man, wenn man R mit O oder mit S zum Schnitt bringt und die Zerlegung in diesen Schnittpunkten beginnt.

Meistens wird bei der Anwendung dieses Verfahrens nur nach einer der drei Kräfte gefragt; in diesem Falle wählt man denjenigen Punkt, in welchem die gesuchte Kraft die gegebene schneidet, als Ausgangspunkt und kommt dann mit einer einzigen Zerlegung aus.

Zuweilen trifft es sich, dass von den beiden Punkten D' und E, welche bei obiger Construction gebraucht werden, der eine weit abseits liegt, wie man auch die Zerlegung beginnen mag; dadurch entstehen unbequeme und in der Regel auch ungenaue Figuren. Man kann sich in solchen Fällen folgendermassen helfen:

Fig. 9. Fig. 10.



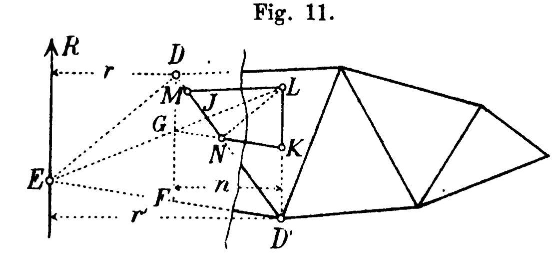
Man wählt (Fig. 9) auf der Richtungslinie der gegebenen Kraft R einen

passend gelegenen Punkt E und verbindet ihn mit den Knotenpunkten D' und D; dann zerlegt man (Fig. 10) R nach ED' und ED in die Seitenkräfte R' und R'', hierauf R' nach den Richtungen der Stäbe u und s in U und S' und schliesslich R'' nach den Richtungen von o und s in O und S''. Damit sind sämtliche drei Stabkräfte bestimmt; denn im Stabe S wirkt jetzt die Summe, beziehungsweise die Differenz der Kräfte S' und S''. Bei einiger Vorsicht reihen sich diese beiden Kräfte sofort aneinander, wie es aus der Figur 10 zu ersehen ist.

5. Das Zimmermann'sche Verfahren.

Die beiden Figuren 7 und 8 lassen sich auch in eine einzige vereinigen. Zieht man nämlich (Fig. 11) durch die Knotenpunkte D und D' Parallelen zu R, legt hierauf durch E eine beliebig gerichtete Linie EGL, sodann durch L die Parallele LM zum obern Gurtstab und durch G die Parallele GK zum untern, so ist das Viereck $KLMN$ dem Kräfteviereck der Figur 8 ähnlich.

Fig. 11.



Um dieses einzusehen, beachte man zunächst, dass die vier Seiten beider Vierecke paarweise parallel zu einander laufen. Ausserdem ist aber auch die Diagonale LN parallel zu R', das heisst zu DE; denn aus Aehnlichkeitsgründen verhält sich

$$\frac{DJ}{D'J} = \frac{GJ}{LJ} \text{ und}$$

$$\frac{GJ}{EJ} = \frac{NJ}{D'J},$$

woraus durch Multiplication folgt

$$\frac{DJ}{EJ} = \frac{NJ}{LJ}.$$

Was den Massstab betrifft, in welchem die Kräfte im Vierecke $KLMN$ aufgetragen erscheinen, so beachte man, dass FG und $D'L$ den statischen Momenten von R hinsichtlich der Punkte D und D' proportional sind; es ist, wenn c eine Constante bedeutet,

$FG = \frac{Rr}{c}$ und $D'L = \frac{Rr'}{c}$. Hieraus ergibt sich die Strecke KL als Differenz von FG und $D'L$ gleich $\frac{R(r'-r)}{c} = \frac{Rn}{c}$. Soll nun KL der Kraft R gleich sein, so muss $c = n$ sein. FG und $D'L$ sind also die durch n dividirten Momente der äusseren Kraft, bezogen auf die Endpunkte der Strebe.

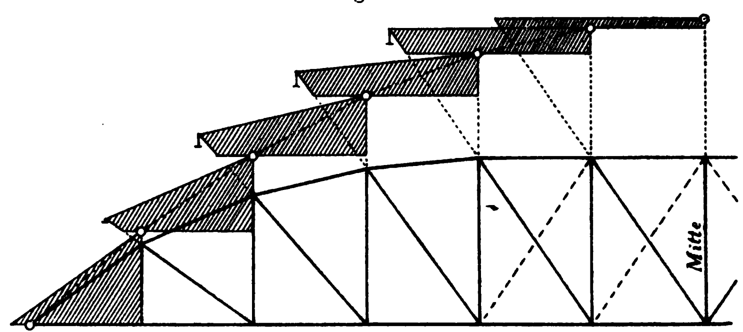
Mit Hülfe dieser Beziehungen lassen sich nun leicht sämtliche Stabkräfte eines Fachwerkträgers bestimmen. Man trägt zu diesem Zwecke von den unteren (oder oberen) Knotenpunkten aus die durch n dividirten Biegungsmomente vertical auf und zeichnet für jedes Fach nach Anleitung der Figur 11 ein Viereck.

n ist die wagrechte Projection der Strebe DD'; in der Regel kann dafür die «Fachlänge» f gesetzt werden.

Um sicher zu gehen, beachte man folgende beiden Regeln: durch die Punkte G und L ziehe man die Parallele zu demjenigen Gurtungsstabe, welcher mit dem bezüglichen Punkte auf der nämlichen Seite der Strebe liegt; und: die Verticale KL und die Strebe müssen sich stets auf derjenigen Gurtung schneiden, von welcher aus die Momente aufgetragen worden sind.

Dieses Verfahren ist zuerst von *Dr. H. Zimmermann* im Centralblatt der Bauverwaltung (1884, S. 281) abgeleitet worden.

Fig. 12.



Die Figur 12 stellt den nach diesem Verfahren ausgeführten Kräfteplan eines *Schwedler*'schen Fachwerkes für den Fall der vollen Belastung dar. Die (strichpunktirte) Momentenkurve ist hier symmetrisch, so dass die Zeichnung auf die Hälfte des Fachwerkes beschränkt werden konnte.

Durch die Endpunkte der Momentenordinaten zieht man nun, entsprechend der Figur 11, Parallelen zu den Gurtungen und bildet dadurch für jedes Fach ein Viereck, dessen Seiten die Stabkräfte, mit Ausnahme derjenigen in den Verticalen, darstellen. Um auch letztere zu erhalten, muss man einen Nebenweg einschlagen: Man bestimmt von jeder Strebenkraft die lotrechte Seitenkraft und zieht von dieser die Knotenlast ab; man gelangt hierbei auf die am linken Ende des Viereckes angefügten kurzen Verticalstriche.

Das *Zimmermann*'sche Verfahren eignet sich besonders dann zur Bestimmung der Stabkräfte, wenn die wagrechte Projection sämtlicher Streben (die sogenannte Fachlänge) constant und überdies mindestens eine der Gurtungen geradlinig ist. Es gestattet ein rasches und sicheres Arbeiten. Von besonderem Werte ist der Umstand, dass die ermittelten Stabkräfte eine übersichtliche Lage einnehmen; die Strebenkräfte werden auf den Richtungslinien der Streben selbst abgeschnitten, und die Gurtungskräfte liegen stets in unmittelbarer Nähe der betreffenden Stäbe. Die schwache Seite des Verfahrens liegt darin, dass bei ungleichen Fachlängen seine schöne Bequemlichkeit zum Teil verloren geht, und darin dass die Kräfte in lotrecht stehenden Streben nicht wie die übrigen Kräfte direct abgeschnitten werden, sondern auf einem kleinen Umwege aufgesucht werden müssen.

Selbstverständlich wird man, um genaue Ergebnisse zu erhalten, die Zeichnung stets in grossem Massstabe ausführen, was um so eher möglich ist, als keine Linien wesentlich über das Fachwerkgerippe hinausgehen.

6. Das Ritter'sche Momentenverfahren.

Das dritte Verfahren endlich, das bei der Fachwerkberechnung (auch in der graphischen Statik) zur Anwendung gelangt, könnte man das rechnerische nennen. Es ist namentlich von Professor *Dr. August Ritter* in seiner «Elementaren Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen» in sehr fruchtbarer und consequenter Weise angewendet worden. Es beruht auf dem Satze, dass für jeden Punkt der Ebene das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkräfte ist. Bezieht man nun (Figur 7) die statischen Momente der Kräfte R, U, O und S auf den Punkt D, so werden die Momente von O und S gleich null und man erhält, wenn man die Lote aus D auf R und U mit r und u bezeichnet, die Beziehung

$$R \,.\, r = U \,.\, u, \qquad \text{oder}$$

$$U = \frac{R \,.\, r}{u},$$

so dass sich U mit Leichtigkeit rechnen lässt. Wählt man den Schnittpunkt von U und S und hierauf denjenigen von O und U, als Momentendrehpunkt, so bekommt man in gleicher Weise die Kräfte O und S.

Der Punkt D (Figur 7) hat zu dem Stabe U eine ganz bestimmte Beziehung; er spielt nicht nur hier, sondern auch bei der Untersuchung der elastischen Formänderungen der Fachwerke (Nr. 28) eine wichtige Rolle. Wir nennen ihn kurzweg den «Drehpunkt» des Stabes U und können diesen Ausdruck so definiren: Der Drehpunkt eines Stabes ist der Schnittpunkt derjenigen zwei Stäbe, welche gleichzeitig mit jenem von einem durch das Fachwerk geführten Querschnitte getroffen werden.

Mit Rücksicht auf diese Definition lässt sich obige Gleichung folgendermassen in Worte fassen:

In Bezug auf den Drehpunkt eines Stabes haben die Stabkraft und die ausserhalb des Schnittes wirkende Kraft gleiches Moment. Oder: Um die Stabkraft zu finden, dividire man das Moment der äusseren Kraft in Bezug auf den Drehpunkt durch den Abstand des Stabes vom Drehpunkte.

Bei den meisten regelmässigen Fachwerken fallen die Drehpunkte der Gurtungsstäbe mit den gegenüber liegenden Knotenpunkten zusammen, während diejenigen der Streben ausserhalb der Construction liegen.

Wir werden in der Folge auch von der *Ritter*'schen Methode zur Berechnung der Fachwerke häufig Gebrauch machen, namentlich da, wo aus irgend einem Grunde nicht die Kraft R selbst, sondern ihr statisches Moment hinsichtlich des Drehpunktes gegeben ist.

Besonders nützlich erweist sich diese Methode, wenn es sich nicht um die Grösse, sondern blos um die Richtung handelt, welche eine der Stabkräfte annimmt. Man hat sich zu diesem Zweck einfach zu fragen, in welchem Sinne (ob positiv oder negativ) die gegebene Kraft um den Punkt D dreht; denselben Sinn hat auch das Moment der Stabkraft, und daraus ergibt sich sofort ihre Richtung.

Bei einfachen Trägern, das heisst bei solchen, die nur an ihren Endpunkten unterstützt sind, ist das Biegungsmoment der ausser-

halb des Querschnittes wirkenden Kraft bekanntlich durchweg positiv. Die Kraft U (Fig. 7) ist daher stets nach links, die Kraft O nach rechts gerichtet; erstere wirkt auf Zug, letztere auf Druck. Daraus folgt der Satz:

Bei Fachwerkträgern, die an ihren Enden frei aufliegen, ist die untere Gurtung stets gespannt, die obere gepresst.

Aus den Momentenbeziehungen lässt sich auch eine Formel ableiten, die bei der Berechnung der Strebenkräfte oft wertvolle Dienste leistet.

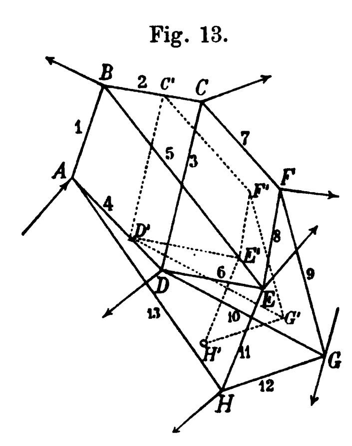
Bezeichnet man (Figur 7) die Momente der gegebenen äusseren Kraft in Bezug auf D und D' mit M und M' und nennt die parallel zur Kraft (also vertical) gemessenen Entfernungen der beiden Drehpunkte von den gegenüberliegenden Gurtungen h und h', so ist die wagrechte Seitenkraft von U gleich $\frac{M}{h}$; denn diese Kraft verhält sich zu U wie u zu h. Ebenso ist die wagrechte Seitenkraft von O gleich $\frac{M'}{h'}$. Zerlegt man auch die dritte Kraft S in eine wagrechte und eine lotrechte Seitenkraft, so ist erstere gleich $\frac{nS}{s}$, wenn mit s die Länge der Strebe und mit n ihre horizontale Projection bezeichnet wird. Nun ist aber die Summe der drei wagrechten Seitenkräfte gleich null. Daraus folgt unter Berücksichtigung der Vorzeichen

$$\frac{M}{h} - \frac{M'}{h'} + \frac{nS}{s} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$S = \frac{s}{n}\left(\frac{M'}{h'} - \frac{M}{h}\right).$$

Mit Hülfe der Momentenbeziehungen lassen sich auch manchmal unregelmässige Fachwerke rasch und bequem berechnen.

Fig. 13.



Das durch die Figur 13 dargestellte Fachwerk hat 8 Knotenpunkte und 13 Stäbe, ist daher statisch bestimmt; dagegen besitzt es keinen Knoten, welchem blos zwei Stäbe zusammenstossen und lässt sich auch nicht derart schneiden, dass blos drei (nicht durch denselben Punkt gehende) Stäbe getroffen würden. Das *Cremona*'sche und das *Culmann*'sche Verfahren führen daher nicht ohne Weiteres zum Ziele.

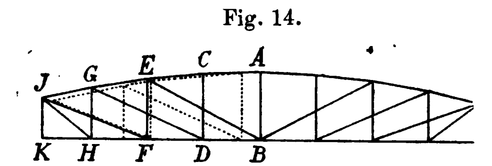
Die Stabkraft 13 kann man nun auf folgendem Wege ermitteln. Man zeichnet eine Figur $A'B'C'D' \ldots H'$, deren Seiten mit Ausnahme der letzten ($A'H'$) denjenigen der gegebenen Figur parallel laufen, wobei man der Abkürzung zu lieb A' mit A und B' mit B zusammenfallen lassen kann. Hierauf stellt man für jeden Punkt der neuen

Figur die statischen Momente derjenigen Kräfte auf, welche an dem entsprechenden Knotenpunkte angreifen, beispielsweise für den Punkt *F'* die Momente der Kräfte 7, 8, 9 und P_f. Da die Kräfte jeder Gruppe sich im Gleichgewicht halten, so ist für jeden dieser Punkte die Momentensumme gleich null. Addirt man sämtliche Momente, so ist deren Summe ebenfalls gleich null. In dieser Summe tritt jede Stabkraft zweimal auf, und zwar mit gleichem Hebelarm, jedoch mit entgegengesetzter Richtung. Die Momente der Stabkräfte heben sich somit gegenseitig auf; nur die letzte (13) macht davon eine Ausnahme, weil *A H* im Allgemeinen nicht parallel *A H'* ist. Schliesslich ergibt sich die Stabkraft 13 gleich der Summe der Momente aller äusseren Kräfte dividirt durch den Abstand des Punktes *H'* von *A H*.

Um hierauf die übrigen Stabkräfte zu finden, kann man das Verfahren wiederholen; besser aber ist es, jetzt, wo in *A* und *H* nur je zwei unbekannte Kräfte angreifen, einen *Cremona*'schen Plan zu zeichnen.

Ein zweites, der Praxis entlehntes Beispiel zeigt die Figur 14. Man zieht von der Mitte ausgehend die punktirten Linien und findet hierauf, wie oben, die Kraft im Stabe *HJ*. (Die Ecke *K* kommt nicht in Betracht, da die beiden anstossenden Kräfte direct bestimmt werden können.) Uebrigens kann man auch durch die Stäbe *A C*, *B E* und *B D* einen Schnitt legen, deren Spannungen nach dem *Culmann*'schen Verfahren ermitteln und von da aus einen *Cremona*'schen Plan zeichnen.

Fig. 14.



Auch das Fachwerk der Figur 5 (Seite 11) lässt sich auf diese Weise berechnen; die Parallelfigur ist dort ebenfalls punktirt eingezeichnet, und zwar derart, dass die Stabkraft 7 bestimmt werden kann.

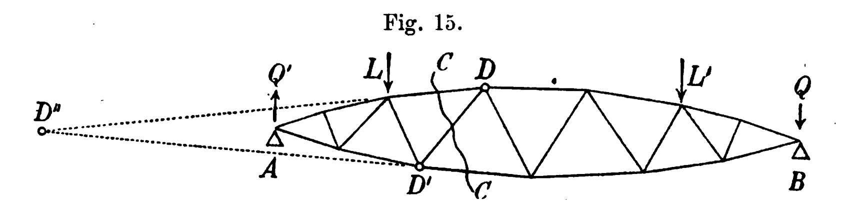
Das vorstehend beschriebene Verfahren ist, so viel wir wissen, zuerst von Prof. *Müller-Breslau*, jedoch auf andere Weise abgeleitet worden. (Vgl. Schweiz. Bauztg. IX, 121.)

7. Ungünstigste Belastungen.

Wie bei allen andern Bauconstructionen so muss auch bei den Fachwerken der Bestimmung der Querschnittsdimensionen jeweilen die Ermittelung der ungünstigsten oder gefährlichsten Belastungen, das ist derjenigen Belastungen, welche in den einzelnen Stäben die grösste (oder auch die kleinste) Spannung hervorrufen, vorausgehen. Dabei kann selbstverständlich nur von der zufälligen oder Verkehrslast die Rede sein; den Einfluss des unverändert bleibenden Eigengewichtes lassen wir in den nachfolgenden Untersuchungen ausser Betracht.

Von massgebendem Einfluss bezüglich der für einen Fachwerkstab gefährlichsten Belastung ist dessen **Drehpunkt**. **Je nachdem der Drehpunkt eines Stabes innerhalb oder ausserhalb der beiden Auflager liegt, wird der Stab bei vollständiger oder bei teilweiser Belastung am stärksten in Anspruch genommen.**

Fig. 15.



Legt man nämlich auf den Fachwerkträger der Figur 15 eine Last L links vom Querschnitte CC auf, so greifen an dem durch den Schnitt abgetrennten Teile AC die Last L und der Auflagerdruck A an; die Mittelkraft Q dieser beiden Kräfte liegt in der Verticalen durch B, ist abwärts gerichtet und um so grösser, je näher die Last an den Schnitt heranrückt. (Vgl. Nr. 86 in *Culmanns* Graph. Statik, 2. Aufl., 1. Bd.) Liegt dagegen eine Last L' rechts vom Schnitt, so beschränkt sich die links vom Schnitte wirkende Querkraft Q' auf den Auflagerdruck A, ist aufwärts gerichtet und um so grösser, je mehr sich die Last dem Schnitte nähert.

Befindet sich nun der Drehpunkt eines Stabes zwischen den beiden Auflagern, so erzeugt die Querkraft in beiden Fällen ein positives Moment; liegt der Drehpunkt aber ausserhalb der Strecke AB, so wirken Q und Q' in entgegengesetztem Sinne. Im ersteren Falle hat man daher, um das Maximum oder das Minimum der Stabkraft zu erzeugen, die ganze Spannweite zu belasten oder zu entlasten; im letzteren ist nur die eine Seite des Schnittes mit Lasten zu versehen. In beiden Fällen sind die schwersten Lasten (falls die vorgeschriebene Belastung überhaupt einen Unterschied zwischen schwer und leicht zulässt) in die Nähe des Schnittes zu bringen.

Fällt der Drehpunkt, was auch vorkommen kann, in eine der Auflagerverticalen, so üben die Lasten jenseit des Schnittes gar keinen Einfluss auf die Stabkraft aus.

Bei der durch die Figur 15 dargestellten Fachwerksform liegen die Drehpunkte der Gurtungsstäbe sämtlich innerhalb, diejenigen

der Streben sämtlich ausserhalb der Spannweite; da dieses bei allen üblichen Brückenfachwerken eintrifft, so gilt die Regel: Die Gurtungen der Brückenfachwerke werden bei vollständiger, die Streben bei teilweiser Belastung am stärksten in Anspruch genommen.

Man erkennt ferner leicht, dass (Fig. 15) die Querkraft Q die geschnittene Strebe auf Zug in Anspruch nimmt, weil die Strebenkraft abwärts gerichtet sein muss, wenn sie in Bezug auf D'' mit Q gleiches Moment haben soll. Das Umgekehrte ist mit Q' der Fall. Hieraus lässt sich die fernere Regel aufstellen:

Folgt man dem Strebenzuge in der Richtung gegen die Last, so werden die gegen die Last fallenden Streben gezogen, die steigenden gedrückt.

Bei den Dachstuhlfachwerken kommen die Strebendrehpunkte meistens in eine der Auflagerverticalen (zuweilen auch zwischen die Auflager) zu liegen. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung der Dachstühle ganz bedeutend, indem die völlige Belastung sämtliche Kräfte auf ihr Maximum steigert. (Vgl. Nr. 21 und 22.)

8. Grösste Gurtungskräfte.

Im Einzelnen gestaltet sich nun die Entwickelung der ungünstigsten Laststellung und daran anschliessend die Bestimmung der grössten Stabkräfte folgendermassen.

In denjenigen Fällen, wo der Drehpunkt ins Innere der Oeffnung fällt (im Allgemeinen bei den Streckbäumen der Fachwerke) zeichnet man für die gegebene Lastenfolge ein Seilpolygon und verschiebt in diesem die der Spannweite entsprechende Schlusslinie so lange, bis man für den betreffenden Drehpunkt das grösste Moment erhält. Wie diese Arbeit vor sich geht, ist im ersten Bande von Culmanns Graph. Statik (Nr. 90) gezeigt worden. Dabei fällt bekanntlich der Drehpunkt stets mit einer der schwersten Lasten zusammen.

Die Bestimmung der Stabkräfte erfolgt sodann am besten nach dem rechnerischen oder Momentenverfahren (Nr. 6). Zeichnet man das Seilpolygon mit der Polweite H und nennt die Ordinaten der Momentenfläche y, so sind die Momente bekanntlich gleich $H \cdot y$. Hat nun die zu berechnende Stabkraft vom Drehpunkte den Abstand u,

so ist die Kraft $U = \frac{Hy}{u}$. Um sie zu finden, muss daher y mit H multiplicirt und das Produkt durch u dividirt werden, eine Aufgabe, die graphisch durch zwei parallele Linien leicht gelöst werden kann. (S. Nr. 17.)

Ist die Verkehrslast gleichförmig verteilt, so wird das Seilpolygon zur Parabel, und die Bestimmung der grössten Momente wird wesentlich einfacher; auch kann man in diesem Falle das Cremona'sche Verfahren (Nr. 3) anwenden, wodurch man in der Regel rascher znm Ziele gelangt. (Vgl. Nr. 15.)

Die kleinsten Gurtungskräfte entstehen selbstverständlich dann, wenn das Fachwerk unbelastet ist, richtiger gesagt, wenn es nur sein eigenes Gewicht zu tragen hat. Auch hier ist ein Cremona'scher oder ein Zimmermann'scher Kräfteplan am Platze. (Nr. 15 und 17.)

9. Grösste Strebenkräfte.

a) Einzellasten.

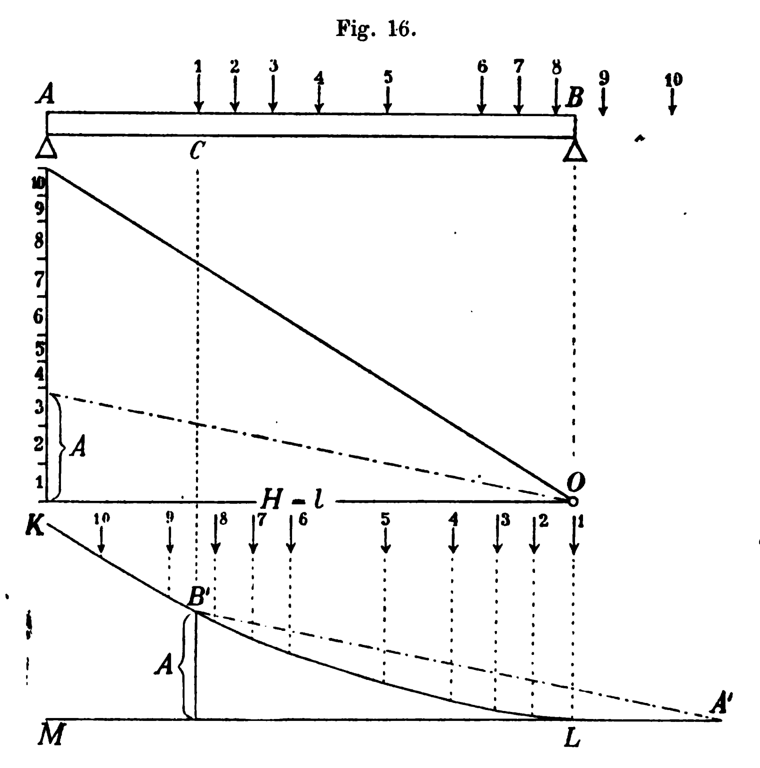
Nicht ganz so einfach gestaltet sich die Berechnung der Stabkraft, wenn der Drehpunkt des Stabes ausserhalb der Oeffnung liegt, was in der Regel bei den Streben eintrifft. In diesem Falle bietet, wie vorhin gezeigt wurde, die einseitige Belastung die grösste Gefahr. Der für die Gurtungen dienliche Weg wird hier unpraktisch; dagegen hat sich der folgende als bequem und übersichtlich erwiesen. Er beruht auf dem bekannten (von *Winkler* aufgefundenen) Verfahren zur Construction der Auflagerdrücke für fortschreitende Lasten.

Schiebt man über den Balken AB (Figur 16) eine gegebene Lastenreihe 1 bis 10 so weit, bis die erste Last über dem Punkte C steht, so findet man den Stützendruck in A auf folgende Weise:

Man kehrt die Reihenfolge der Lasten um, stellt die erste Last unter das Auflager B, bildet hierfür ein Kräftepolygon, dessen Poldistanz gleich der Spannweite ist, und zeichnet das entsprechende Seilpolygon KL; dabei legt man den Pol O am besten so, dass der letzte Strahl und somit auch die letzte Seilpolygonseite (ML) horizontal läuft. Verlängert man nun diese letzte Seite nach rechts und zieht eine Linie $B'A'$, deren Anfangspunkt vertical unter C

liegt und deren Horizontalprojection gleich der Spannweite ist, so kann man $B'LA'$ als das umgeklappte Seilpolygon der wirklichen Belastung und $B'A'$ als dessen Schlusslinie ansehen. Zwei Strahlen durch O parallel zu $A'B'$ und zu $A'L$ schneiden daher auf der Linie der Kräfte den Auflagerdruck A ab. Aus Congruenzgründen ist aber diese Kraft auch gleich der Ordinate von B' bezüglich ML als Abscissenaxe.

Fig. 16.



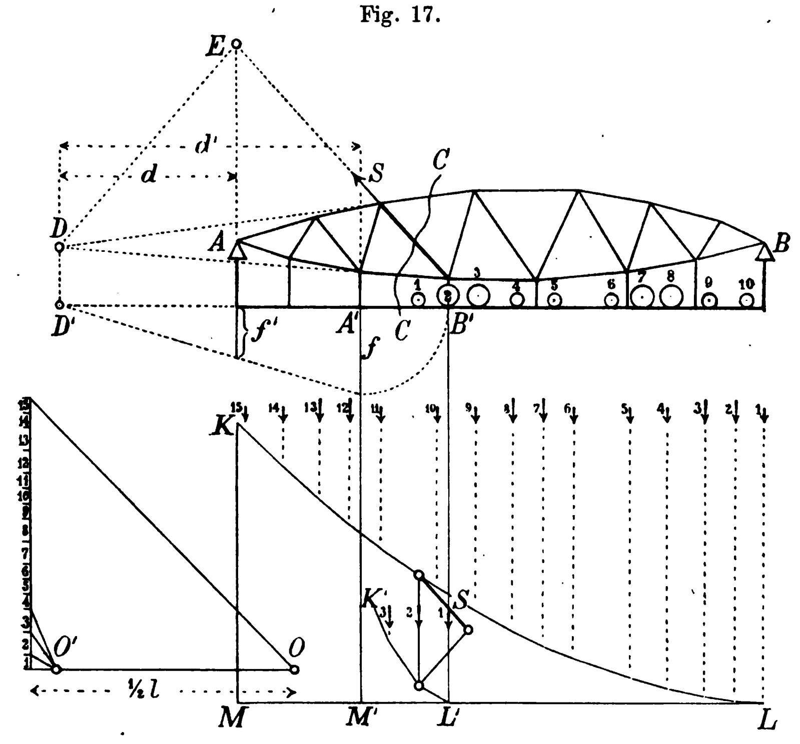
Schiebt man nun die Lastenreihe weiter nach links, so bleibt das Seilpolygon KL unverändert, weil die erste Last der umgekehrten Reihe beständig auf der Verticalen durch B bleibt. Man findet daher die Grösse des Auflagerdruckes für jede Stellung der Lasten dadurch, dass man lotrecht unter der ersten Last die Ordinate des Seilpolygons abgreift.

Kehrt man eine gegebene, nach links schreitende Lastenreihe um, stellt die erste Last unter das rechte Auflager und zeichnet hierzu, die Spannweite als Polabstand benützend, ein Seilpolygon, so schneidet

dieses zusammen mit seiner letzten Seite auf der Verticalen der ersten Last jeweilen den linken Auflagerdruck ab.

Es sei nun für das Fachwerk AB (Figur 17) die stärkste Zugspannung der vom Schnitte CC getroffenen Strebe S zu bestimmen. Dann muss nach früher der rechts vom Schnitte liegende Teil des Fachwerkes belastet werden, und zwar so, dass die schwersten Lasten in der Nähe des Schnittes stehen. (Wir können uns unter dieser Belastung einen Eisenbahnzug denken, welcher, mit der schweren Lokomotive voran, von rechts her auf die Brücke fährt.) Die Fahrbahn sei am unteren Streckbaum aufgehängt.

Fig. 17.



Zunächst wenden wir die gegebene Lastenreihe um, stellen das erste Rad unter B auf und zeichnen hierzu ein Kräftepolygon und ein Seilpolygon. Als Abstand des Poles O wählen wir wegen Raummangels die halbe Spannweite. Dann stellen die Ordinaten des Seilpolygons KL die verdoppelten Auflagerdrücke A dar, welche bei fortschreitendem Zuge entstehen.

So lange sich nun der ganze Zug noch rechts vom Hängpfosten B' befindet, wirkt links vom Querschnitte nur der Auflagerdruck A. Dies ändert sich aber, sobald das erste Rad den Punkt B' überschreitet. Denn jetzt entsteht im Hängpfosten A' eine abwärts gerichtete Zugkraft, die vom Auflagerdruck A abgezogen werden muss, wenn man die Mittelkraft Q der ausserhalb CC wirkenden Kräfte kennen will.

Gerade wie wir nun eine Kurve der linksseitigen Auflagerdrücke für den Träger AB gezeichnet haben, so können wir eine gleiche Kurve für den kleinen Längsträger $A'B'$ zeichnen. Wir schieben zu diesem Zwecke das erste Rad des umgekehrten Zuges unter B' und zeichnen, die Länge $\frac{1}{2}f = \frac{1}{2}A'B'$ als Poldistanz benützend, ein secundäres Seilpolygon $K'L'$. Bringt man hierbei die beiden Abscissen ML und $M'L'$ zur Deckung, so wird die Kraft A' direct von der Kraft A abgezogen, und man kann, mit dem Zirkel in der Hand, mit Leichtigkeit den grössten Wert der Differenz $Q = A - A'$ heraussuchen.

Bei krummlinigen Gurtungen interessirt uns aber nicht das Maximum der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kraft Q, sondern das Maximum des Momentes von Q in Bezug auf den Drehpunkt D der Strebe.

Das statische Moment von Q in Bezug auf den genannten Punkt ist gleich

$$- A \cdot d + A' \cdot d' = - d\left(A - \frac{A'd'}{d}\right).$$

Da d unveränderlich ist, so brauchen wir uns nur mit dem Klammerausdrucke zu befassen. Nun erhält man den Wert $\frac{A'd'}{d}$ einfach dadurch, dass man die Polweite für das secundäre Seilpolygon nicht gleich f, sondern gleich

$$f' = \frac{f\,d}{d'}$$

macht.

Die Strecke f' ist in der Figur 17 auf einfache Weise bestimmt worden; die Hälfte davon bildet den Abstand für den Pol O'. Wird nun das Seilpolygon $K'L'$ mit diesem neuen (in der Figur allein benützten) Pole gezeichnet, so ist die Ordinatendifferenz der beiden Seilpolygone gleich obigem Klammerausdrucke. Man sucht

jetzt mit dem Zirkel die Stelle, wo dieser Unterschied am grössten wird und hat dann den gefundenen Wert als eine im Auflager A wirkende Kraft anzusehen.

Um endlich die Strebenkraft selbst zu finden, verlängert man (nach Fig. 7) ihre Richtungslinie bis E, verbindet E mit D, und zerlegt die genannte Kraft in zwei Seitenkräfte, von denen die eine parallel der Strebe, die andere parallel ED wirkt. Diese Zerlegung ist zwischen den beiden Seilpolygonen vollzogen und die gefundene Kraft S durch stärkeres Ausziehen hervorgehoben worden.

Aus der Natur der Aufgabe ergibt sich, dass das Maximum obiger Ordinatendifferenz stets mit einer Ecke des kleinen (untern) Seilpolygons zusammenfällt; wenn das Maximum der Strebenkraft erreicht ist, steht daher jederzeit ein Rad auf dem Punkte B'. Es kann dies das erste, zweite, dritte oder ein folgendes Rad sein; von vornherein lässt sich dies nicht entscheiden. Dagegen wird ein geübter Zeichner die Sachlage erst überblicken und, um Zeit zu ersparen, die kleinen Seilpolygone nur soweit herstellen, als es nötig ist, um das gesuchte Maximum mit Sicherheit zu erkennen.

Selbstverständlich muss für jede Strebe ein besonderes secundäres Polygon gezeichnet werden. Nur bei parallelen Streckbäumen und gleich langen Fächern werden diese Polygone congruent.

Nur selten (bei kurzen Feldern und kleinen Vorderlasten) dürfte der Fall eintreten, dass das erste Rad des Eisenbahnzuges nicht nur den Punkt B', sondern auch noch den Pfosten A' zu überschreiten hat, um die grösstmögliche Strebenkraft zu erzeugen. Die Zeichnung muss alsdann etwas abgeändert werden; doch wollen wir diesen Fall, da er in der Praxis kaum vorkommt, nicht weiter verfolgen.

Im Bisherigen ist zwar stets vom Maximum einer Strebenkraft die Rede gewesen; doch ist damit auch zugleich die Frage nach dem Minimum erledigt. Denn um in der Strebe die entgegengesetzte Grenzspannung hervorzurufen, braucht man nur den Eisenbahnzug von der andern Seite her auf die Brücke zu schieben. Zu diesem Behufe wird man im Allgemeinen die Zeichnung in umgekehrter Lage wiederholen; bei symmetrischer Form des Fachwerkes kann man dagegen das Seilpolygon KL an seiner Stelle lassen und das Minimum der Strebenkraft an der symmetrisch zur Fachwerkmitte befindlichen Stelle bestimmen.

Der hiermit beschriebene Weg zur Ermittlung einer Strebenkraft lässt uns leider im Stich, wenn die Strebe lotrecht gerichtet

ist, weil der Punkt E alsdann ins Unendliche fällt. In diesem Falle kann man die gesuchte Kraft derart bestimmen, dass man die gegebene Kraft zuerst mit einem der beiden Gurtungsstäbe zum Schnitt bringt und eine zweimalige Zerlegung ausführt. (Vgl. Fig. 7 und 8, S. 14.) Gewöhnlich ist indessen in diesem Falle das Momentenverfahren (Nr. 6) vorzuziehen. Bezieht man nämlich die statischen Momente der gegebenen Kraft Q und der gesuchten Kraft S auf den Drehpunkt der lotrechten Strebe, nennt hierbei die beiden Hebelarme beziehungsweise q und s, so ist $Qq = Ss$ oder $S : Q = q : s$. Man findet daher die Kraft in einer lotrechten Strebe, wenn man die Querkraft auf der Richtungslinie der Strebe aufträgt und vom Drehpunkt aus auf die Auflagerverticale projicirt. (Vgl. die Anwendungen in den Nrn. 15 und 17.)

b) Verteilte Lasten.

Besteht die vorgeschriebene zufällige Belastung nicht aus einer Reihe von Einzellasten, sondern aus verteilten Lasten, so gehen das Hauptpolygon und die secundären Polygone in Kurven über. Das Verfahren zur Bestimmung der Strebenkräfte bleibt im Uebrigen dasselbe; nur ist das Aufsuchen der grössten Ordinatendifferenz bei kurvenförmigen Seilpolygonen etwas mühsamer.

In der Regel ist jedoch in diesem Falle die Belastung gleichförmig verteilt und dann ergibt sich folgende wertvolle Vereinfachung.

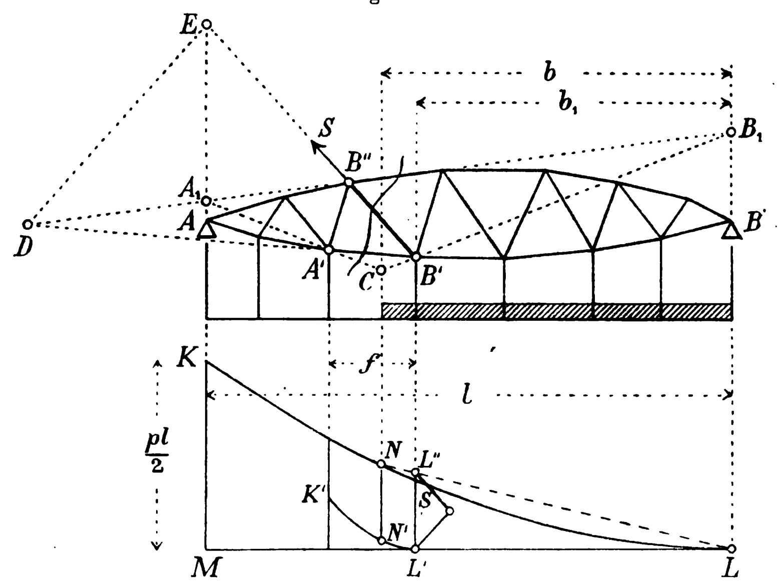
Ueberschreitet eine solche Belastung, von rechts herkommend, den Punkt B' (Figur 18), so nimmt die Kraft in der Strebe zuerst noch etwas zu, erreicht hierauf ihren Maximalwert und nimmt von da an wieder ab. Die Grenze, bis zu welcher die zufällige Last reichen muss, damit die Strebenkraft ihren grössten Wert erlangt, findet man nach folgender Regel:

Um die Grenze der ungünstigsten Belastung zu bestimmen, verlängert man (Fig. 18) die Richtung der vom Querschnitte getroffenen oberen Gurtung, bis sie die Auflagerverticalen in A_1 und B_1 schneidet; zieht man hierauf $A_1 A'$ und $B_1 B'$, so bestimmt der Schnittpunkt C die gesuchte Grenze.

Hängt man nämlich in C eine einzelne Last auf, so verteilt

sich diese auf die beiden benachbarten Knotenpunkte A' und B' und es entstehen in diesen Punkten zwei nach unten, in A und B zwei nach oben gerichtete Kräfte. Für diese vier Kräfte, die sich im Gleichgewicht halten, kann man die geschlossene Figur $A_1 A' B' B_1$ als Seilpolygon betrachten; denn der Schnitt von $A_1 A'$ und $B_1 B'$ liegt, wie es sein muss, auf der Richtungslinie der Last. Durch den Querschnitt werden nun die zwei links liegenden Kräfte A und A' abgetrennt; ihre Mittelkraft geht nach einem bekannten Satze durch den Schnitt der Seilpolygonseiten $A_1 B_1$ und $A' B'$; da aber dieser Schnittpunkt zugleich der Drehpunkt der Strebe ist, so wird in diesem Falle die Strebenkraft gleich null. Wenn aber eine in C aufgelegte Einzellast auf die Strebe keinen Einfluss ausübt, so bildet C zugleich die Grenze der ungünstigsten Belastung.

Fig. 18.



Zeichnet man nun in der Figur 18 für die gegebene gleichförmig verteilte Belastung wieder die zwei Seilpolygone KL und $K'L'$, so wird deren Ordinatenunterschied lotrecht unter C am grössten ausfallen. Beide Seilkurven sind aber Parabeln mit vertical gerichteten Axen. Ferner müssen die Tangenten in N und N' einander parallel laufen, wenn die Strecke NN' ein Maximum werden soll. Die Kurven LN und $L'N'$ sind daher einander ähnlich. Infolge dessen laufen auch die Sehnen LN und $L'N'$ einander

parallel, und hieraus folgt endlich, dass die Strecke $L' L''$, welche von $L N$ abgeschnitten wird, gleich $N N'$ ist.

Man sieht, dass es gar nicht nötig ist, die Parabel $K' L'$ zu zeichnen; man braucht blos den lotrecht unter C liegenden Punkt N mit L zu verbinden; dann schneidet diese Verbindungslinie lotrecht unter B' den gesuchten Wert ab.

Um bei gleichförmig verteilter Last die grössten Strebenkräfte zu finden, zeichne man zuerst die Parabel KL als Kurve der grössten Querkräfte. ($KM = {}^1/_2\, p\, l$, wenn p die auf die Längeneinheit treffende Belastung bedeutet.) Dann bestimme man für jede Strebe den Grenzpunkt C der ungünstigsten Belastung, lote ihn hinunter nach N, verbinde N mit L und zerlege den unter B' gemessenen Abschnitt $L'L''$ parallel zu S und zu DE in zwei Seitenkräfte.

Bei lotrechten Streben gilt der auf der Seite 28 stehende Satz.

Liegt die Fahrbahn oberhalb des Fachwerks, so werden bei der Bestimmung des Grenzpunktes die beiden Gurtungen miteinander vertauscht. Alles Uebrige bleibt unverändert. —

Ein zweites Verfahren zur Bestimmung der grössten Strebenkraft bei gleichförmig verteilter Belastung hat Prof. Dr. *Herzog* in Zürich abgeleitet. (Schweiz. Bauztg., Bd. XV, S. 46.) Es beruht auf folgender Betrachtung.

Die in der Strebe herrschende Kraft bleibt offenbar die nämliche, wenn man die Belastung zwischen C und B' zu gleichen Teilen auf die Punkte C und B', und ebenso die Belastung zwischen B' und B zu gleichen Teilen auf die Punkte B' und B überträgt. Man erhält dann drei Einzellasten in den Punkten C, B' und B. Von diesen drei Lasten hat die erste keinen Einfluss auf die Strebenkraft, weil sie durch den Grenzpunkt geht; ebenso fällt die dritte ausser Betracht, weil sie im Auflager wirkt. Die Strebenkraft ist somit nur von der im Punkte B' wirkenden Last abhängig, deren Grösse ${}^1/_2\, p\, b$ beträgt. Um die Strebenkraft zu finden, hat man aus dieser Last den Auflagerdruck A zu bestimmen und diesen nach den drei geschnittenen Stabrichtungen zu zerlegen.

Der Auflagerdruck A bleibt aber unverändert, wenn man anstatt der Last ${}^1/_2\, p\, b$ im Punkte B' die Last ${}^1/_2\, p\, b_1$ im Punkte C anbringt. Auch diese Belastung des Fachwerkes führt auf die

gesuchte Strebenkraft; nur muss hierbei die im Hängpfosten A' entstehende Kraft unberücksichtigt bleiben.

Nun ist oben gezeigt worden, dass eine in C angreifende Last auf die Strebe keinen Einfluss ausübt, wenn man neben dem Auflagerdruck A auch die Kraft A' in Rechnung zieht. Wir sehen hieraus, dass die Strebenkraft gleich S oder gleich null wird, je nachdem man A' berücksichtigt oder vernachlässigt. Daraus folgt, dass S auch dadurch gefunden wird, dass man die Kraft A' nach den Richtungen der drei Stäbe zerlegt.

Um bei geichförmig verteilter Last die grösste in der Strebe $B'B''$ wirkende Kraft zu finden, bringe man im Grenzpunkte C der ungünstigsten Belastung die Last $\frac{1}{2}\, p\, b_1$ an, bestimme den auf den Hängpfosten A' entfallenden Zug und zerlege ihn nach der Richtung der Strebe und nach deren Drehpunkt in zwei Seitenkräfte.

Auf den ersten Blick scheint mit dieser neuen Art der Berechnung der Strebenkraft wenig gewonnen zu sein. Wenn aber die Kraft A' durch einen Endpunkt der Strebe geht, so wird das *Herzog*'sche Verfahren vorteilhafter, weil man dann den Drehpunkt der Strebe nicht mehr braucht. Das Verfahren eignet sich namentlich für Fachwerke mit gekrümmten Gurtungen, deren Streben abwechselnd lotrecht und schief laufen. Doch muss die Zeichnung in grossem Massstabe ausgeführt werden, wenn die Genauigkeit der Ergebnisse eine genügende sein soll. (Vgl. Nr. 15 und Tafel 2.)

10. Haupt- und Gegenstreben.

Infolge der wechselnden Belastung, welcher die Fachwerke, namentlich die Brückenfachwerke ausgesetzt sind, kommen stets einige Streben vor, die bald auf Zug, bald auf Druck arbeiten müssen, falls diese Doppelwirkung nicht durch irgend ein Mittel beseitigt wird. Für die praktische Ausführung der Fachwerke ist die Frage, ob eine Strebe auf Zug oder Druck in Anspruch genommen wird, von grosser Bedeutung. Bei den nach dem System *Howe* gebauten hölzernen Fachwerken können die verticalen Rundeisen nur Zugkräften, die stumpf aufgesetzten hölzernen Streben nur Druckkräften widerstehen. Bei den eisernen Fachwerken dürfen gezogene Streben bandförmig (oder als Rundeisen) hergestellt werden; gedrückte dagegen müssen, der Knickgefahr wegen, einen gespreizten Querschnitt erhalten. Ferner erfordert ein nach beiden Richtungen

in Anspruch genommener Stab nach den neueren Anschauungen über Festigkeitsverhältnisse einen stärkeren Querschnitt, als wenn die nämliche Kraft nur in einer Richtung wirkt. Ausserdem bezeichnet man es auch, und wohl mit Recht, für schädlich, wenn die Vernietung in verschiedener Richtung in Anspruch genommen wird.

Wo nun die Verhältnisse so liegen, dass man eine doppelte Wirkung der Streben nicht gestatten kann oder will, da werden zu den schon vorhandenen Streben sogenannte Gegenstreben hinzugefügt. In der Regel laufen hierbei die Hauptstreben abwechselnd lotrecht und schief; die Gegenstreben nehmen alsdann in den von den lotrechten Streben gebildeten Trapezen die Stelle der zweiten Diagonale ein, so dass je zwei sich kreuzende Diagonalstreben zusammengehören. Das Fachwerk wird hiedurch scheinbar statisch unbestimmt, ist es aber thatsächlich nicht, so bald, (sei es durch passenden Querschnitt oder durch die Art der Befestigung) dafür gesorgt wird, dass die sich kreuzenden Stäbe nur in einem Sinne Widerstand leisten können. Denn jetzt tritt bei gegebener Belastung stets nur eine von beiden Streben in Thätigkeit; die andere bleibt spannungslos, bis sie infolge Aenderung der Belastung selbst zu wirken beginnt und die erstere ablöst. Diejenige Diagonale, welche in Thätigkeit steht, während das Fachwerk nur sein eigenes Gewicht trägt, nennen wir in der Zukunft stets «Hauptstrebe», die andere «Gegenstrebe».

Freilich findet die beabsichtigte Wirkungsweise bei eisernen Fachwerken nicht mit voller Schärfe statt, da selbst dünne Band- oder Rundeisen immer noch eine gewisse Druckkraft aushalten können, bevor sie sich seitlich ausbiegen. Doch wird dieser Umstand, da er einerseits die Tragfähigkeit des Fachwerkes in der Regel begünstigt, andrerseits nur schwer genau berücksichtigt werden kann, in der Praxis vernachlässigt.

Als natürliche Folge hievon ergibt sich, dass die kleinste Spannung zweier sich gegenseitig ersetzender Streben stets gleich null zu rechnen ist. Die Ermittelung der grössten Spannung erfolgt nach den in der vorangehenden Nummer abgeleiteten Regeln und unterliegt keiner Schwierigkeit. Anders verhält es sich jedoch mit der Ermittelung der in einem verticalen Pfosten auftretenden Grenzspannungen. Sobald ein Pfosten ein mit Haupt- und Gegenstrebe ausgestattetes Fach be- grenzt, führt die Bestimmung dieser Spannungen zu einer auffallend verwickelten Aufgabe.

Wir müssen bei der Lösung dieser Aufgabe unterscheiden, ob die Fahrbahn der Brücke sich oberhalb oder unterhalb des Fachwerkes befindet.

a) Unten liegende Fahrbahn.

Betrachten wir zunächst ein spezielles Beispiel. Das durch die Figur 19 dargestellte Fachwerk habe eine Spannweite von 56 *m* und sei in 14 Felder von 4 *m* Länge eingeteilt. Der untere Streckbaum sei geradlinig, der obere einer Parabel mit verticaler Axe eingeschrieben. Die Höhe der Pfosten betrage in der Mitte 7 *m* und nehme gegen die Auflager bis auf 3 *m* ab. Das Fachwerk habe an eigenem Gewicht 1 Tonne, an zufälliger Last 2 Tonnen auf den laufenden Meter zu tragen; die erstere Last denken wir uns zu $^1/_4$ an den oberen und zu $^3/_4$ an den unteren Knotenpunkten angebracht.

Eine kleine Voruntersuchung zeigt, dass die sechs mittleren Felder Gegenstreben verlangen, falls ein Zeichenwechsel der inneren Spannung ausgeschlossen bleiben soll.

Wir wollen speziell den sechsten Pfosten (von links an gerechnet) näher betrachten und zunächst die Frage beantworten, wie sich die in diesem Pfosten wirkende Kraft ändert, wenn die zufällige Belastung erst von rechts nach links und dann von links nach rechts über das Fachwerk fortschreitet. Dabei bezeichnen wir Zugkräfte mit dem +-, Druckkräfte mit dem —-Zeichen.

Das eigene Gewicht (Belastungsfall I) ruft, wie man vermittelst eines *Cremona*'schen Kräfteplanes (oder auch durch Rechnung) findet, in dem betreffenden Pfosten eine Kraft von — 1,5 *t* hervor; dabei sind, wie man sich leicht überzeugen kann, durchgehends die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen, welche wir daher Hauptstreben nennen, in Thätigkeit. Die an den sechsten Pfosten anstossenden Hauptstreben wollen wir mit *a* und *b*, die Gegenstreben mit *a'* und *b'* bezeichnen.

Rückt nun die zufällige Belastung von rechts her über den Träger vor, so nimmt die Zugspannung in den Diagonalen *a* und *b* nach den Betrachtungen der vorigen Nummer zu, bis der Anfangspunkt der Last das betreffende Feld erreicht. Rückt die Last weiter vor, so nimmt die Spannung wieder ab. Am Schlusse, wenn die Last die ganze Oeffnung bedeckt, herrscht aber in den beiden Streben immer noch Zug; denn die vollständige Belastung wirkt stets in demselben Sinne wie das Eigengewicht. Es findet also bei diesem Vorgange in den beiden, an den sechsten Pfosten anstossenden Feldern kein Spannungswechsel statt; der Pfosten unterliegt den einfachen, in der vorigen Nummer abgeleiteten Gesetzen, das heisst, seine Druckspannung nimmt anfänglich zu und dann wieder ab, geht aber nie in Zug über. Ihr Maximum erreicht diese Spannung, wenn der Anfangspunkt der Last nach *C* (Belastungsfall II) gelangt; in diesem Momente beträgt die Pfostenkraft — 14,8 *t*. Bedeckt sodann die Belastung die ganze Spannweite, so ergibt sie sich gleich — 4,5 *t*. (Fall III.)

Bewegt sich nun die Belastung von links nach rechts, so nimmt zunächst die vom Eigengewicht erzeugte Druckkraft ab; denn Lasten, welche links vom Pfosten aufgelegt werden, rufen nach früher Zugspannungen hervor. Dieses Gesetz ändert sich jedoch nach einiger Zeit, weil an Stelle der Strebe *b* ihre Gegenstrebe *b'* tritt. In der Strebe *b* wird nämlich die vom

Eigengewichte herrührende Zugkraft ebenfalls allmälig kleiner, weil jede links von dieser Strebe aufgebrachte Last in ihr einen Druck hervorruft. Nach einiger Zeit (Belastungsfall IV) wird daher die Spannung in b gleich null. In diesem Augenblicke vollzieht sich im sechsten Fache der Wechsel, und von jetzt an arbeitet die Gegenstrebe b'. Die Spannung im Pfosten berechnet sich für diesen Zeitpunkt gleich $+1,6$; der Druck ist also in Zug übergegangen.

Fig. 19.

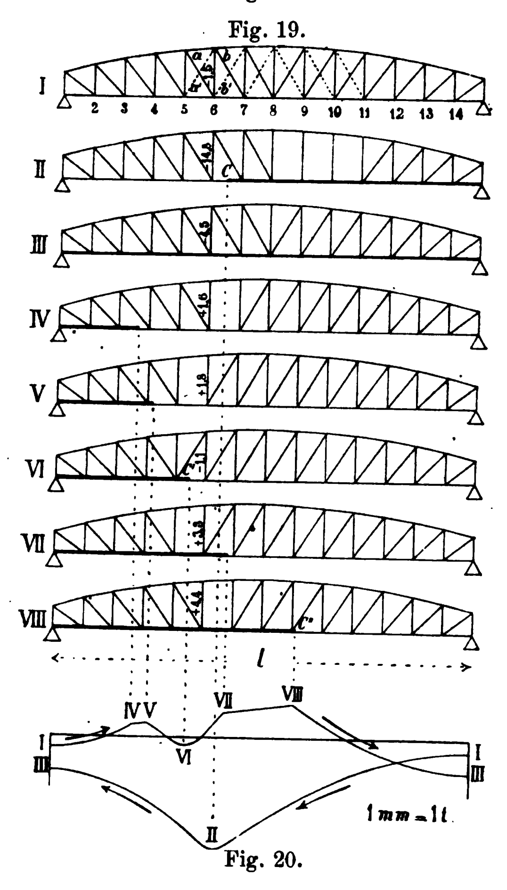


Fig. 20.

Schiebt man die Last noch etwas weiter vor, so tritt der Strebenwechsel auch im fünften Felde ein. (Fall V.) An Stelle der Diagonale a tritt ihre Ersatzstrebe a'. Die Pfostenkraft ergibt sich für diesen Fall gleich $+1,8\ t$.

Von jetzt an sind in den zwei fraglichen Feldern die nach rechts steigenden Diagonalen thätig und die im Pfosten wirkende Kraft muss nun wieder abnehmen, weil er gegen die neu hinzu kommenden Lasten ansteigt. Diese Abnahme dauert so lange, bis die Last bei dem Punkte C' (Fall VI) anlangt; wir erhalten hier ein secundäres Druckmaximum, das sich gleich $-1,1\ t$ berechnet.

Nun tritt wieder Zunahme ein, weil sich Lasten rechts vom Querschnitte anfügen. Beim Belastungsfall VII überschreitet die ausserhalb des fünften Faches wirkende Kraft dessen Drehpunkt zum zweiten male; das heisst, es tritt in diesem Fache wieder Strebenwechsel ein. Beim Falle VIII beobachten wir denselben Vorgang im sechsten Felde, und von da an arbeiten wieder wie Anfangs die beiden Hauptstreben. Der Belastungsfall VII lässt im Pfosten die Kraft $+3,3\ t$, der Fall VIII die Kraft $+4,4\ t$ entstehen; bis dahin herrscht somit Wachstum. Von jetzt ab tritt jedoch der normale Zustand wieder in sein Recht, und demzufolge beansprucht jede neue Last den Pfosten auf Druck. Die vorhin gefundene Kraft verringert sich daher fortwährend und wird am Schlusse (wie bei III) gleich $-4,5\ t$.

In der Figur 20 haben wir die allmälige Aenderung der Pfostenkraft übersichtlich dargestellt. Die gefundenen Kräfte sind jeweilen am Anfangs-

punkte der Belastung als Ordinaten aufgetragen und die sich ergebenden Punkte durch Kurven verbunden worden. Die Verbindungslinien sind meistens Parabeln. Pfeile geben die Richtung an, in welcher die Last fortschreitet.

Dass die fragliche Pfostenkraft von I bis IV zunimmt, zwischen V und VII ein Minimum durchschreitet und von VIII an wieder abnimmt, haben wir oben begründet. In den beiden übrig bleibenden Strecken IV bis V und VII bis VIII sodann sind die Diagonalen a und b' thätig. Der in Untersuchung gezogene Pfosten steht daher an seinem oberen Knotenpunkte nur mit der oberen Gurtung in Verbindung, während sich sonst stets eine der beiden Streben (a' oder b) beigesellt. Das Gleichgewicht der an diesem Knotenpunkte zusammenstossenden Kräfte verlangt nun, dass die Pfostenkraft mit den Gurtungskräften zu- und abnimmt. Da aber letztere durch jede neu hinzukommende Last vergrössert werden, so folgt, dass in der Figur 20 die Strecken IV—V und VII—VIII einer nach rechts steigenden Kurve angehören müssen. Das absolute Maximum der Pfostenkraft muss also notwendig beim Belastungsfall VIII eintreten. Daraus ergibt sich endlich folgender (von Prof. *Müller-Breslau* zuerst abgeleitete) Satz:

Um bei unten liegender Fahrbahn das Maximum der Zugkraft in einem Pfosten zu erhalten, welcher Fächer mit Gegenstreben begrenzt, hat man die zufällige Last vom benachbarten Auflager aus soweit vorzuschieben, bis in dem nach der Mitte zu liegenden Fache der Strebenwechsel zum zweiten male eintritt.

Wie man unschwer einsieht, ergibt sich aus diesem Satze, dass für den Mittelpfosten oder, bei ungerader Fachzahl, für die beiden Mittelpfosten das fragliche Maximum bei vollständiger Belastung eintritt.

Hat man es nicht mit gleichförmig verteilter, sondern mit einer unregelmässigen Reihe von Einzellasten zu thun, so müssen die schwersten Lasten in der Nähe des Pfostens aufgestellt werden. Denn bei dieser Aufstellung wird die Kraft in der oberen Gurtung an der genannten Stelle, und damit auch die Pfostenkraft selbst, grösser als bei jeder anderen, die der Hauptbedingung entspricht.

Es frägt sich nun, wie auf Grund des abgeleiteten Satzes die grösste Zugkraft einer Verticalen für eine gegebene Belastung gefunden werden kann.

Wir wollen die Belastung zuerst als gleichförmig verteilt ansehen.

Um zunächst den Punkt C^* zu finden, bis zu dem die Belastung vorzudringen hat, damit (Figur 21) im sechsten Fache der Strebenwechsel eintritt, verfährt man am besten in folgender Weise:

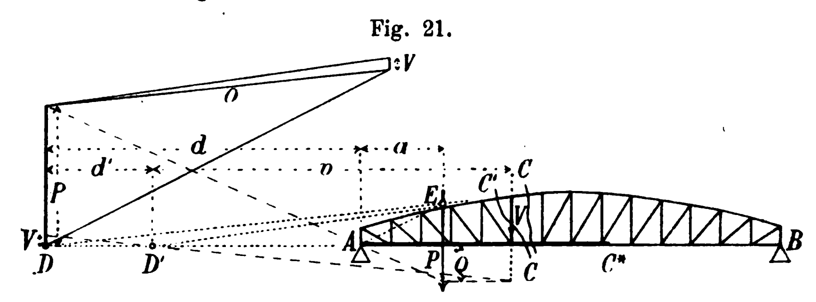
Man bestimmt zuerst die Kraft, welche durch totale Belastung in der Hauptstrebe dieses Faches entsteht, sowie denjenigen linksseitigen Auflagerdruck A, welcher die nämliche Spannung erzeugt; sodann ermittelt man diejenige an das rechte Auflager anstossende zufällige Belastung, welche dem Drucke A entspricht, und zieht dieselbe von der totalen Belastung ab.

Um indessen die in der fraglichen Verticalen wirkende Zugkraft zu erhalten, ist die Kenntnis dieses Grenzpunktes nicht nötig. Denn wenn die Diagonalen im anstossenden Fache spannungslos sind, so geht die Mittelkraft Q der ausserhalb des Schnittes CC angreifenden Kräfte durch den Dreh-

punkt D der Diagonalen. Diese Mittelkraft setzt sich aber aus den links vom Schnitte befindlichen Lasten P und dem Auflagerdrucke A zusammen; da nun der Drehpunkt und die Kraft P bekannt sind, so lässt sich Q leicht bestimmen. Nach dem bekannten Satze von den statischen Momenten ist nämlich $Q.d = P.a$. Trägt man daher (Fig. 21) die Kraft P von D aus lotrecht auf und zieht durch ihren Endpunkt eine Linie nach dem Auflager A, so wird die Grösse von Q auf der Richtungslinie von P abgeschnitten.

Schneidet man jetzt das Fachwerk in der Richtung $C'C$, so dass der Pfosten getroffen wird, so ändert sich die Kraft Q bloss um das Gewicht des oberen Knotenpunktes. Man findet daher die Pfostenkraft dadurch, dass man die im Drehpunkte D wirkende Kraft Q in die Richtungslinien der vom Schnitte $C'C$ getroffenen Stäbe zerlegt und von der verticalen Seitenkraft V das obere Knotengewicht abzieht.

Fig. 21.



Ist D' der Drehpunkt des fraglichen Pfostens, so verhalten sich die Kräfte Q und V umgekehrt wie ihre Abstände von D'. Ueberträgt man daher die Kraft Q in die Pfostenverticale und projicirt sie aus D' auf die Verticale durch D, so erhält man die Grösse von V.

Noch einfacher ist folgende Lösung. Denkt man sich die Kraft Q zunächst in die Richtungen der vom Schnitte CC getroffenen Stäbe zerlegt und nennt die betreffenden Seitenkräfte O und U, so ist Q einerseits die Mittelkraft von O und U, andrerseits die Mittelkraft von A und P. Man findet daher O, indem man P nach O, U und A, oder was auf dasselbe hinauskommt, in die Richtungen EA und ED zerlegt. Aus O gelangt man sodann durch eine zweite Zerlegung leicht auf V. Wir haben in der Figur 21 auch diesen Weg angedeutet; er führt in der That auf den nämlichen Wert von V.

Die Kraft P umfasst hier die Belastung sämtlicher links von CC befindlichen Pfosten, das Eigengewicht inbegriffen.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass das soeben beschriebene Verfahren zu dem gleichen Ergebnisse führt, wie auch die Lasten rechts vom siebenten Pfosten angeordnet sein mögen, wenn nur die Bedingung des Strebenwechsels im sechsten Fache erfüllt wird. In der That kann man diesem rechtsseitigen Teil der Belastung unter Einhaltung dieser Bedingung beliebige Gruppierung geben, so namentlich eine von links her vorrückende Belastung mit einer von rechts her kommenden combiniren; erstere hat dann bis zum siebenten Pfosten (oder auch darüber hinaus) zu reichen und letztere soweit zu gehen, dass der bewusste Wechsel eintritt.

Fragen wir nun zweitens, wie man bei einer unregelmässigen Reihe von **Einzellasten** vorzugehen hat.

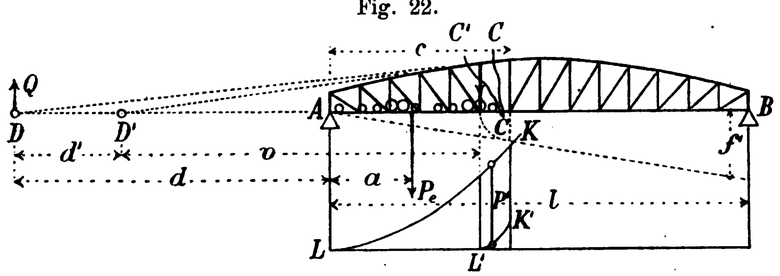
Am einfachsten gestaltet sich die Lösung, wenn man aus der zusammenhängenden Lastenreihe zwei einzelne bildet und die Bedingung so fasst:

Man schiebt von links her eine Lastenreihe so weit vor, dass das Moment der links vom Schnitte CC liegenden Lasten in Bezug auf die linke Auflagerverticale ein Maximum wird, und von rechts her eine zweite Lastenreihe so weit, dass sich im massgebenden Fache der Strebenwechsel einstellt. Denn es ist klar, dass die gesuchte Pfostenkraft ihr Maximum erreicht, wenn die Kraft $Q = \frac{Pa}{d}$ möglichst gross wird.

Die Hauptschwierigkeit besteht hier darin, das Moment Pa zum Maximum zu machen,

Zu diesem Zwecke benützen wir das in der Nummer 9 (Seite 23) beschriebene Verfahren zum Zeichnen der Kurve der Auflagerdrücke. Wir kehren (wie dort) die Lastenreihe um, stellen die erste Last über das Auflager (hier A) und zeichnen dazu, die Spannweite l als Polabstand benützend, ein Seilpolygon. In der Figur 22 sei LK dieses Polygon. Dazu fügen wir

Fig. 22.



ein zweites, secundäres Seilpolygon $L'K'$, für welches die Strecke $f' = \frac{fl}{c}$ die Polweite bildet. Und nun suchen wir mit dem Zirkel den grössten Ordinatenunterschied P' beider Polygone; dann ist der von der zufälligen Belastung herrührende Teil von Q gleich $\frac{P'l}{d}$.

Die Ordinaten der Kurve LK liefern nämlich nach früher die rechtsseitigen Auflagerdrücke für fortschreitende Belastung, also die Werte $\frac{Pa}{l}$; mit l multiplicirt sind daher diese Ordinaten gleich dem Momente Pa, welches wir zum Maximum machen sollen. Dies gilt jedoch nur, solange sich die Lasten sämtlich links vom sechsten Pfosten befinden. Treten Lasten in das sechste Fach hinein, so muss der auf den siebenten Pfosten entfallende Auflagerdruck, mit c multiplicirt, abgezogen werden, und diese Subtraction vollzieht sich eben durch das mit der Polweite f' gezeichnete Seilpolygon $L'K'$. Da nun P' das Maximum des Wertes $\frac{Pa}{l}$ darstellt, so ist in der That Q gleich $\frac{Pa}{d} = \frac{P'l}{d}$ zu nehmen.

Hierzu kommt noch der vom Eigenwicht herrührende Anteil, dessen Moment sich wie oben gleich $P_e\, a$ ergibt, so dass schliesslich der Wert $Q = \frac{P' l + P_e\, a}{d}$ herauskommt.

Um sodann die verlangte Pfostenkraft selbst zu finden, kann man wie oben die Kraft Q in die Richtungslinien der drei Stäbe zerlegen, welche vom Schnitte $C'C$ getroffen werden, und von der verticalen Seitenkraft V das Gewicht eines oberen Knotenpunktes abziehen. Oder man zerlegt die Kräfte P' und P_e, ähnlich wie es oben für verteilte Lasten erklärt worden ist.

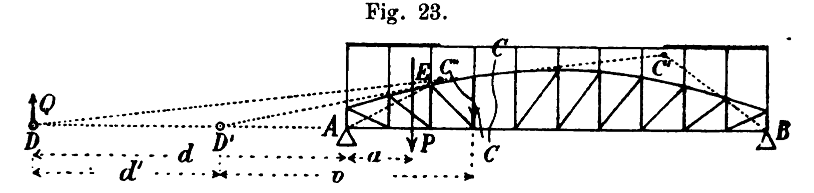
b) Oben liegende Fahrbahn.

Wesentlich anders gestaltet sich die Lösung der vorliegenden Aufgabe, wenn die zufälligen Lasten oberhalb des Fachwerkes verkehren. In diesem Falle wird nämlich der Pfosten durch die Belastungen der beiden Nachbarfelder auf Druck beansprucht, und sollen wir das Zugmaximum herbeiführen, so müssen wir jedenfalls unmittelbar über dem Pfosten eine Strecke unbelastet lassen. Die ungünstigste Belastung setzt sich somit hier stets aus zwei Teilen zusammen.

Um zunächst die gestellte Aufgabe für gleichförmig verteilte Belastung zu erledigen, denken wir uns, diese schiebe sich von beiden Seiten gleichzeitig vor, und zwar nach Analogie mit dem Falle a) so, dass in dem rechts vom Pfosten liegenden Felde beide Diagonalen spannungslos bleiben. Dann wird die Druckkraft in der oberen Gurtung und damit auch die Zugkraft im Pfosten anfänglich zunehmen. Tritt jedoch die linksseitige Belastung in das links vom Pfosten befindliche Fach hinein, so nimmt zwar die Pfostenkraft noch etwas zu, bald darauf aber sehr rasch ab, weil jetzt der obere Knotenpunktsdruck immer mehr zur Geltung kommt. In dem links anliegenden Felde befindet sich also ein Punkt C^*, bei welchem die Belastung still zu stehen hat.

Diese Grenze wird dadurch bedingt, dass eine unendlich kleine Ueberschreitung derselben die Pfostenkraft unverändert lässt. Man findet sie (Fig. 23)

Fig. 23.



am schnellsten zeichnerisch, indem man die Verbindungslinie $A\,E$ mit dem vom Schnitte $C\,C$ getroffenen oberen Gurtungsstabe zum Schnitt bringt. Denkt man sich nämlich, die linksseitige Belastung sei bis zum Punkte C^*, die rechtsseitige bis zum Punkte C' gelangt, und man lege auf jeder Seite noch eine unendlich kleine Last zu, deren Verhältnis so bemessen wird, dass ihnen das

Seilpolygon $A C^* C' B$ entspricht, so geht für diese zwei Lasten, die ausserhalb des Schnittes CC wirkende Kraft durch den Drehpunkt D des geschnittenen Faches; die Diagonalen bleiben also nach wie vor spannungslos. Für den Schnitt C^*C aber fällt die Querkraft in den Drehpunkt D' des Pfostens, so dass sich, wie es verlangt war, in diesem die Spannung nicht ändert.

Wir gelangen somit zu dem Satze:

Um bei oben liegender Fahrbahn das Maximum der Zugkraft in einem Pfosten zu erhalten, welcher Fächer mit Gegenstreben begrenzt, hat man die zufällge Last vom benachbarten Auflager aus bis zu dem nach der Figur 23 bestimmten Grenzpunkte C^* und vom entfernteren Auflager aus zu gleicher Zeit so weit vorzuschieben, bis in dem nach der Mitte zu liegenden Fache beide Diagonalen spannungslos werden.

Bei ungerader Fachzahl (und symmetrischer Form des Fachwerks) ergeben sich hiernach für die beiden Mittelpfosten zwei gleich lange Belastungsstrecken. Bei gerader Fachzahl scheint uns die Regel im Stiche zu lassen, wenn man sie auf den mittelsten Pfosten anwendet; doch lässt sich die Unsicherheit dadurch beseitigen, dass man sich in der Mitte des Fachwerkes ein unendlich schmales Fach eingefügt denkt.

Die Kraft selbst, welche sich im ungünstigsten Falle im Pfosten einstellt, bestimmt man ähnlich wie unter a). Da der Auflagerdruck A und die links vom Schnitte CC befindlichen Lasten P eine durch D gehende Mittelkraft Q bilden, so ist wie oben $Q = \frac{Pa}{d}$. Diesen Wert ermittelt man durch Rechnung oder Zeichnung, zerlegt sodann Q in die drei Richtungen, welche vom Schnitte $C^* C$ getroffen werden, und subtrahirt von der lotrechten Seitenkraft V das Gewicht des oberen Knotenpunktes, sowie den kleinen Druck, welchen die über E hineinragende Last auf diesen Knotenpunkt ausübt. Wie früher ergibt sich $V = \frac{Q d'}{v} = \frac{P a d'}{d v}$.

P umfasst hier wie oben sowohl die zufälligen Lasten als auch das eigene Gewicht links vom Schnitte CC.

Wenn eine Reihe von Einzellasten gegeben ist, sollte man zunächst die Frage prüfen, ob die erste Last über E zu stehen hat, oder ob sie in das Feld hineinzuschieben ist. Da der Punkt C^* stets sehr nahe bei E liegt, so wird ein Vorschieben in den praktisch vorkommenden Fällen kaum je nötig sein; es dürfte vielmehr stets genügen, die erste Last über E zu stellen und dann wie oben zu verfahren.

Vorstehende Untersuchungen beziehen sich zunächst auf einen sogenannten Halbparabelträger; sie lassen sich aber auch auf alle anderen Fachwerksformen übertragen, bei denen die Hauptstreben gegen die Mitte zu fallen, das heisst auf die meisten im Brückenbau vorkommenden Formen. Fachwerke, deren Hauptstreben gegen die Mitte zu steigen, werden selten gebaut. Dagegen besitzen wir in dem Parabelträger die Uebergangsform, bei welcher

die schiefen Streben durch das Eigengewicht gar nicht in Anspruch genommen werden, bei welcher somit jede Diagonale ebenso wohl als Haupt- wie als Gegenstrebe betrachtet werden kann. In der Nummer 14 ist diese Fachwerksform besprochen und dabei auch die Frage der Pfostenzugkräfte näher erörtert.

Sowohl unser auf den Seiten 33 bis 35 behandeltes Beispiel, als auch die angeschlossenen Betrachtungen lassen deutlich erkennen, dass die verticalen Streben trotz der Gegendiagonalen neben Druckspannungen unter Umständen auch Zugspannungen erfahren. Während in den Diagonalen die Doppelwirkung durch Gegenstreben vermieden wird, bleiben die Pfosten, soweit sie an Kreuzfelder stossen, dem Wechsel zwischen Zug und Druck nach wie vor ausgesetzt. Eine Ausnahme bilden blos die Fachwerke mit geradlinigen Streckbäumen. Man täuscht sich also, wenn man glaubt, den Wechsel zwischen Zug und Druck durch das Anbringen von Gegenstreben gänzlich beseitigen zu können. Zur Erreichung dieses Zweckes dürfte es kaum ein anderes Mittel geben, als die Diagonalen bei der Montierung mit einer gewissen Eigenspannung zu versehen. Dadurch wird jedoch das Fachwerk beziehungsweise das betreffende Fach statisch unbestimmt und die Stabkräfte sind, wenn man genau vorgehen will, nach den im vierten Kapitel (speziell Nr. 37) abgeleiteten Regeln zu berechnen.

In der Praxis berechnet man die Querschnitte der Fachwerkstäbe häufig blos auf Grund der absolut grössten Stabspannungen. Mag dieser Weg auch nach den neueren Anschauungen über die Bruchgefahr eiserner Stäbe im allgemeinen nicht mehr gerechtfertigt sein, so ist er doch hinsichtlich der Pfosten der Fachwerkbrücken zulässig; denn diese haben in der Regel nicht nur als Streben zu dienen, sondern auch die Querträger aufzunehmen und deren Lasten auf die Knotenpunkte zu übertragen. Meistens sollen sie überdies der Brücke die nötige Verticalsteifigkeit verleihen. Sie werden aus diesem Grunde vielfach stärker ausgeführt, als nach den in ihnen auftretenden ursprünglichen Spannungen erforderlich wäre. Berücksichtigt man noch die ungewöhnlichen Schwierigkeiten, welche uns die in dieser Nummer angestellten Untersuchungen bereitet haben, so erklärt es sich, dass man ihnen bis jetzt meistens aus dem Wege gegangen ist. Dass ein dringendes Bedürfnis nach Klarstellung dieser Fragen vorliege, kann zwar nicht behauptet werden; der Praktiker wird seine Brückenpfosten nach

wie vor ohne Rücksicht auf deren Zugspannungen berechnen. Wer aber tiefer in die Wirkungsweise der Fachwerke zu blicken wünscht, kann obigen Betrachtungen nicht aus dem Wege gehen sie bilden ein notwendiges Glied zu einer vollständigen Theorie des Fachwerkes.

Zweites Kapitel.

Spezielle Fachwerke.

11. Das Fachwerk mit parallelen Gurtungen.

Wenn die Streckbäume eines Fachwerkes geradlinig und zu einander parallel laufen, so ergeben sich nicht nur hinsichtlich der Herstellung, sondern auch hinsichtlich der statischen Berechnung wesentliche Vereinfachungen, und wir haben jedenfalls in diesen beiden Umständen die Ursachen der so grossen Beliebtheit des Fachwerkes mit parallelen Streckbäumen zu suchen.

Um die in einem Gurtungsstabe herrschende Spannung zu finden, hat man allgemein für dessen Drehpunkt das grösste Biegungsmoment zu bestimmen und dieses durch den Abstand des Drehpunktes vom Stabe zu dividiren. (Vergl. Fig. 7 und Nr. 6, S. 17.) Bei parallelen Gurtungen sind nun diese Abstände von Anfang bis Ende gleich gross und zwar gleich der gegenseitigen Entfernung beider Streckbäume. Nennt man diese Entfernnng kurzweg die »Höhe« des Fachwerkes, so gilt der Satz:

Die Kraft in einem Gurtungsstabe ist beim Parallelträger gleich dem Drehpunktsmomente, dividirt durch die Fachwerkshöhe.

Auf das Vorzeichen der hier auftretenden Momente und Kräfte braucht man nicht weiter zu achten, da, wie schon früher (Seite 19) gezeigt worden, die untere Gurtung stets auf Zug, die obere auf Druck in Anspruch genommen wird.

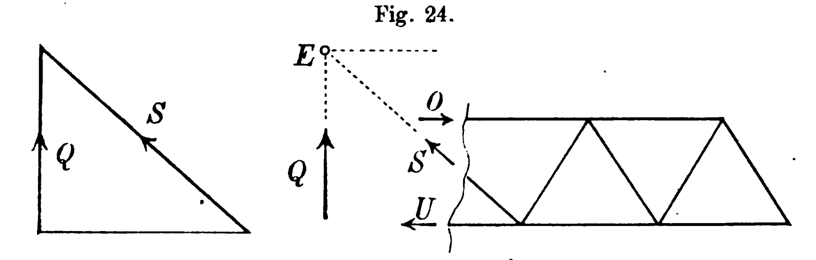
Bekanntlich nimmt das Biegungsmoment eines vollständig belasteten einfachen Balkens gegen die Mitte hin zu; daraus folgt:

Die Kraft in der Gurtung ist in der Mitte der Oeffnung am grössten und nimmt nach beiden Seiten hin ab.

Diese Abnahme erfolgt indessen, wie sich leicht erkennen lässt, nicht etwa allmälig, sondern von Stab zu Stab sprungweise.

Auch für die Streben ergibt sich ein einfaches Gesetz. Die Drehpunkte dieser Glieder liegen nämlich im Unendlichen. Be-

Fig. 24.



stimmt man nun die in einer Strebe herrschende Kraft nach dem Schnittverfahren (Seite 13), indem man die Querkraft Q (die »Scherkraft« nach Culmanns Benennung) mit der Strebe zum Schnitte bringt und im Schnittpunkte nach der Richtung der Strebe und nach der Richtung des unendlich fernen Drehpunktes zerlegt (Fig. 24), so gelangt man zu dem Ergebnisse:

Die Kraft in einer Strebe ist nur von der Grösse, nicht aber von der Lage der Querkraft abhängig; sie wird gefunden, wenn man die Querkraft parallel zur Strebe und parallel zu den Gurtungen zerlegt.

Die in einer verticalen Strebe wirkende Kraft ist einfach gleich der Querkraft.

Laufen die Streckbäume horizontal und ist die Strebe gegen den Horizont um den Winkel α geneigt, so kann man die Strebenkraft auch nach der Formel

$$S = \frac{Q}{\sin \alpha}$$

berechnen.

In der Figur 24 wird die in Betracht gezogene Strebe auf Zug beansprucht, da die Kraft S, gleich wie Q, nach oben gerichtet ist. Rückt man mit dem Querschnitte nach rechts, so dass die

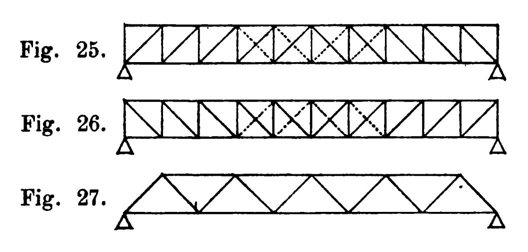
folgende Strebe getroffen wird, so nimmt (bei gleich gerichtetem Q) die Kraft S wiederum die Richtung nach oben an, wirkt aber jetzt auf Druck. Die dritte Strebe erfährt wieder Zug, die vierte wieder Druck, so dass man sagen kann: In den aufeinander folgenden Streben wechseln im allgemeinen Zug und Druck ab.

Dieses Gesetz ändert sich jedoch, wenn die Querkraft ihr Zeichen wechselt. Bekanntlich ist bei einem einfachen Träger die Mittelkraft Q der links von einem Schnitte wirkenden Kräfte auf- oder abwärts gerichtet, je nachdem der Schnitt links oder rechts vom sogenannten Maximalmomentenpunkte angebracht wird. (Vgl. den ersten Band von Culmanns Graph. Statik, Nr. 85). Daraus ergibt sich der Satz: Die gegen den Maximalmomentenpunkt fallenden Streben werden auf Zug, die steigenden auf Druck in Anspruch genommen.

Da unsere Brückenträger neben dem Eigengewichte stets noch veränderliche oder zufällige Belastungen zu tragen haben, so besitzt die Querkraft für einen bestimmten Schnitt keinen festen Wert, sondern schwankt zwischen zwei Grenzwerten hin und her. Man macht sich hiervon ein deutliches Bild, wenn man für den Träger die Kurven der grössten und kleinsten Querkräfte zeichnet. Die Punkte, in welchen diese beiden Kurven die Abscissenaxe schneiden, begrenzen die Strecke, auf welcher die Querkraft bald positiv, bald negativ werden kann. Links von dieser Strecke ist Q stets aufwärts, recht davon stets abwärts gerichtet. (Vgl. Fig. 155, S. 364 von Culmanns Graph. Statik samt der beigefügten Erklärung). Daraus folgt, dass es unter den Streben eines Fachwerkes mit parallelen Gurtungen stets einige gibt, die bei wechselnder zufälliger Belastung bald auf Zug, bald auf Druck in Anspruch genommen werden; es sind diejenigen, welche in die oben genannte Strecke fallen. Will man dieser doppelten Wirkung ausweichen, so bleibt nach früher (Nr. 10, S. 31) nichts übrig, als auf der Strecke, innerhalb welcher die Scherkraft bald nach oben, bald nach unten gerichtet ist, sogenannte Gegenstreben anzubringen.

Die Streben eines Fachwerkes mit parallelen Streckbäumen können verschiedenartig angeordnet sein. In Europa kommen die drei durch die Figuren 25—27 dargestellten Anordnungen nebst einigen Abarten vor; die erstere wird bei hölzernen, die beiden anderen werden bei eisernen Fachwerken gewählt. Das dritte

System wird meistens mit mehrfachem Strebenzug (vgl. Nr. 35 u. ff.) ausgeführt und deshalb zuweilen Netzwerk genannt. In den Figuren 25 und 26 sind die Gegenstreben durch punktirte Linien angedeutet. Bei der dritten Form (Fig. 27) können Gegenstreben nicht leicht angebracht werden, da sie sehr flach ausfallen würden; man begnügt sich damit, die Zugstreben auf der mittleren Strecke so zu gestalten, dass sie auch den gelegentlich auftretenden, verhältnismässig kleinen Druckkräften widerstehen können.



12. Kräfteplan eines Fachwerkes mit parallelen Gurtungen.

(Tafel 1.)

Zur Erläuterung des Gesagten haben wir auf der Tafel 1 die inneren Kräfte einer Eisenbahnbrücke von 50 *m* Spannweite und 5 *m* Höhe graphisch bestimmt. Das eigene Gewicht wurde für jede Tragwand zu 1,1 *t* auf den laufenden Meter angenommen. Als zufällige Belastung wählten wir zwei gegeneinander fahrende Güterzüge, den einen mit zwei, den andern mit einer Lokomotive. Die Radgewichte und Axabstände von Lokomotive und Wagen sind in der Figur 7 dargestellt. Für die Streben wurde die Anordnung der Textfigur 26 und als Fachlänge 5 *m* angenommen, so dass die Diagonalen unter 45° geneigt sind. Die Fahrbahn befinde sich in der Höhe der o b e r e n Gurtung.

a) Gurtungen.

Um zunächst die Gurtungskräfte zu erhalten, zeichneten wir die Kurven der Maximal- und der Minimalmomente. (Figur 2). Letztere rührt vom Eigengewicht her und ist, da dieses gleichförmig verteilt angenommen wird, eine Parabel, deren Pfeil sich leicht rechnen lässt. Das Biegungsmoment in der Mitte der Oeffnung

ist nämlich, wenn die Spannweite mit l und das Eigengewicht pro Meter mit g bezeichnet wird,

$$M_g = \frac{g\,l^2}{8}.$$

Zeichnet man die Momentenfläche mit der Poldistanz H, so wird der Pfeil der Eigengewichtsparabel gleich

$$\frac{g\,l^2}{8\,H}.$$

In unserem Falle ist $g = 1{,}1$ und $l = 50$; als Poldistanz haben wir (um die Scherkräfte in bequemem Massstabe zu erhalten) die halbe Spannweite, also 25 m angenommen; der gesuchte Parabelpfeil ergibt sich somit zu

$$\frac{1{,}1 . 50^2}{8.25} = 13{,}75\,t.$$

Diese Kraft ist in der Figur 2 von der Abscisse AB aus nach oben und unten aufgetragen und daran anschliessend die Parabel zweimal gezeichnet worden. Als Massstab wählten wir 1mm = 1 t.

Hierauf wurden die Momente der zufälligen Belastung bestimmt. Zu diesem Zwecke stellten wir zwei Züge, den einen mit zwei Maschinen und fünf Wagen, den andern mit einer Lokomotive und drei Wagen einander gegenüber, und zwar so, dass das erste Rad des ersteren Zuges in die rechtsseitige Auflagerlinie zu stehen kam. Dann zeichneten wir hierzu in der Figur 3 ein Kräftepolygon mit dem Pole O und in der Figur 4 ein Seilpolygon. Der Pol O liegt so, dass sein Horizontalstrahl die beiden Züge trennt. Demzufolge stellt der linke Ast des Seilpolygons mit der nach links verlängerten Seite 20 21 die Auflagerdrücke A für einen nach links fahrenden Zug dar. (Vergl. S. 23). Nur müssen die Ordinaten des Seilpolygons, da wir nicht l, sondern $^1/_2 l$ als Polweite verwendet haben, noch halbirt, beziehungsweise im Massstabe 1 mm = 0,5 t abgegriffen werden.

Dasselbe Seilpolygon dient aber auch zur Bestimmung der Maximalmomente. Man zeichnet zu diesem Zwecke eine Schlusslinie ein, verschiebt sie derart, dass die den Knotenpunkten entsprechenden Teilpunkte nacheinander unter die sechs schweren Räder 18 bis 23 zu liegen kommen, und sucht mit dem Zirkel unter den einem Teilpunkte entsprechenden Momentenordinaten die grösste aus. Der Gang dieser Arbeit kann als bekannt vorausgesetzt werden. Der Symmetrie wegen braucht sie nur für die Knotenpunkte 6 bis 10

durchgeführt zu werden. Die fünf Schlusslinien, welche die grössten Momentenordinaten lieferten, sind ausgezogen und die Endpunkte dieser Ordinaten mit den Nummern 6 bis 10 bezeichnet worden.

Die auf diese Weise bestimmten grössten Ordinaten wurden sodann in der Figur 2 an die Eigengewichtsmomente angefügt und ihre Endpunkte zu den beiden Polygonen der Maximalmomente verbunden.

Die in einem Gurtungsstabe wirkende Kraft ist nun gleich dem im Drehpunkte wirkenden Momente, dividirt durch die Fachwerkshöhe (S. 41). Für den ersten oberen Gurtungsstab liegt der Drehpunkt im zweiten unteren Knoten; man hat daher die lotrecht unter diesem abgegriffene Ordinate y der Figur 2 mit der Polweite H zu multipliciren und durch die Fachwerkshöhe h zu dividiren, um die Gurtungskraft zu erhalten. Da aber $H = \frac{1}{2} l = 5h$ genommen wurde, so ist die Gurtungskraft einfach gleich $5\,y$. Greift man daher die genannte Ordinate in einem 5-mal grösseren Massstabe ($1\,mm = 5\,t$) ab, so bekommt man sofort die gesuchte Streckbaumkraft.

Auf dieselbe Weise erhält man sämtliche übrigen, unteren und oberen Kräfte. Da der Drehpunkt eines oberen Gurtungsstabes stets unter dessen innerem Endpunkte, der Drehpunkt eines unteren Stabes über dessen äusserem Endpunkte liegt, so gilt in der linken Fachwerkhälfte jede Momentenordinate gleichzeitig für den unmittelbar links davon befindlichen oberen und für den rechts liegenden unteren Stab. Wir wollten jedoch die beiden Streckbäume getrennt behandeln und zeichneten daher für jeden eine besondere Momentenkurve.

Dass in den Mittelfeldern Gegenstreben vorhanden sind, ändert nichts an diesen Beziehungen; denn bei den für die Gurtungen ungünstigsten Belastungen liegt der Maximalmomentenpunkt stets ganz oder nahezu in der Mitte der Oeffnung; die Gegenstreben stehen somit ausser Wirksamkeit und fallen ausser Betracht.

Zum Zwecke der Materialverteilung ist es nützlich, die Veränderlichkeit der Gurtungskräfte durch eine Fläche darzustellen, deren Abscissen den Stablängen und deren Ordinaten den Kräften entsprechen. Man gelangt hierbei zu den in der Figur 2 eingezeichneten Staffellinien, von welchen die oberen den Momentenkurven umschrieben, die unteren denselben eingeschrieben sind. Der Flächeninhalt dieser Figuren entspricht dem theoretischen Materialbedarf der beiden Streckbäume.

b) Diagonalen.

Um die Strebenkräfte zu bestimmen, benützen wir die Kurven der Scherkräfte.

Das Eigengewicht führt, als gleichförmig verteilte Last, zu einer geraden Linie, welche am linken Ende der Oeffnung die Kraft $+\frac{1}{2} g l$, am rechten die Kraft $-\frac{1}{2} g l$ abschneidet. In unserem Falle ergibt sich dieser Wert gleich $27{,}5\,t$. (Fig. 5 und 6).

Zur Ermittelung der von der zufälligen Last erzeugten Strebenkräfte dient sodann, wie schon bemerkt, das Seilpolygon der Figur 4. Entsprechend der Textfigur 17 (Seite 25) haben wir jedoch für jedes Feld des Fachwerkes noch ein secundäres Seilpolygon zu zeichnen. Dies ist mit Hülfe des Poles O' in der Figur 3, dessen Abstand gleich der halben Fachlänge ist, geschehen. Die neun kleinen Polygone (das zehnte ist überflüssig) sind hier alle congruent, da der Pol O' für alle gemeinschaftlich ist. Die grössten Ordinatenunterschiede kann man nun mittelst des Zirkels leicht finden. Sie sind der Deutlichkeit wegen etwas stärker ausgezogen.

Anstatt die kleinen Nebenpolygone unten zu zeichnen, kann man auch nach Prof. *Winkler* deren Ordinaten von dem Hauptpolygone abwärts auftragen und die erhaltenen Punkte verbinden, wie es bei einigen Fächern angedeutet st. Man erkennt dann die gesuchten Maximalwerte auf den ersten Blick.

In den Figuren 5 und 6 haben wir sodann die Wirkungen des Eigengewichtes und der zufälligen Belastung vereinigt und in der ersteren die Kräfte in den Diagonalen, in der letzteren diejenigen in den Verticalen bestimmt.

Durchschneidet man das Fachwerk senkrecht, so dass eine Diagonale getroffen wird, und zwar beispielsweise diejenige des zweiten Faches, so hat man von dem Auflagerdrucke ($\frac{1}{2} g l$) das Gewicht von $1\frac{1}{2}$ Fächern abzuziehen, um die Querkraft des Eigengewichtes zu erhalten. Wir greifen daher die den Diagonalen zukommenden Querkräfte auf der Eigengewichtslinie einfach in den Fachmitten ab. An diese Werte fügen wir die halben Maxima der Figur 4 an und zerlegen hierauf die Summe beider Strecken parallel zur Strebe und parallel zur Gurtung.

Als Ergebnis dieser Arbeit erhält man zunächst die Maximalkräfte der sechs nach rechts fallenden Streben. Für die siebente Strebe würde diese Kraft negativ; daraus folgt, dass nur in den zwei mittleren Fächern Gegenstreben angebracht werden müssen.

Gleichwohl haben wir dieselbe Arbeit auch für die vier letzten Fächer durchgeführt. Denn die kleine negative Scherkraft, welche im siebenten Fache entsteht, wenn der Lokomotivenzug von rechts her kommt, ist wegen der Symmetrie gleich der positiven Kraft, die sich im vierten Fache einstellt, falls der Zug von links her anfährt. Diese Stellung der Last ist aber gerade diejenige, welche in der Diagonale die kleinste Spannung hervorruft. Die in den vier letzten Fächern vorgenommenen Zerlegungen liefern uns also die Minimalspannung der vier ersten Diagonalen.

Da in den zwei Mittelfächern die kleinste Spannung nach früher gleich null zu rechnen ist (S. 32), so sind damit sämtliche Maximal- und Minimalkräfte für die Diagonalen bestimmt. Sie sind in der Figur 1 in Zahlen beigeschrieben worden.

c) Pfosten.

Was die verticalen Streben betrifft, so ist hier die Lage der Fahrbahn von Einfluss. Wir haben oben liegende Fahrbahn vorausgesetzt. Alsdann fällt die grössere Hälfte des Eigengewichtes auf die Knotenpunkte der oberen Gurtung. Wir wollen annehmen, dass zwei Drittel derselben der oberen und ein Drittel der unteren Gurtung zukomme. (Je nach der Construction der Brücke wird sich dieses Verhältnis verschieden ergeben.) Schneidet man nun das Fachwerk schief durch, sodass eine Verticale, zum Beispiel die dritte getroffen wird, so ist vom Auflagerdrucke ($^1/_2 g l$) zuerst ein halbes, dann ein ganzes und schliesslich noch ein drittel Fachgewicht und für jede weitere Verticale ein Fachgewicht mehr abzuziehen. Man greift daher die dem Eigengewichte entsprechende Scherkraft jeweilen um $^1/_6 f$ links von der Verticalen ab. (Verteilt sich das Gewicht zu drei Viertel und ein Viertel auf oben und unten, so ist diese Strecke gleich $^1/_4 f$, — verteilt es sich zu gleichen Teilen, gleich 0 zu nehmen.) Nur für die erste Verticale (den Endpfosten) hat man, wie leicht erkannt wird, um ein $^1/_6 f$ nach rechts zu gehen. (Figur 6.)

An die sich hieraus ergebenden Kräfte sind nun wieder die durch 2 dividirten Maximalkräfte der Figur 4 anzufügen und zwar (da die Fahrbahn oben liegt) für die zweite Verticale die der ersten Diagonale entsprechende Kraft und so fort. Der ersten Verticalen (über welche hinaus ein Vorschieben der Räder im allgemeinen

keinen Sinn mehr hat) kommt die Endordinate der Figur 4 zu. Dadurch werden die Gesamt-Scherkräfte erhalten, und da es sich hier um lotrechte Streben handelt, so stellen diese Kräfte ohne weiteres die in diesen Streben wirkenden grössten Druckkräfte dar.

Dies gilt indessen nur für die sechs ersten Verticalen; denn die Kräfte, welche sich auf diesem Wege für die folgenden Pfosten ergeben, werden durch eine von links kommende Belastung übertroffen und kommen demnach nicht in Betracht.

Um schliesslich die kleinsten Kräfte in den Verticalstreben zu bekommen, hat man zunächst für die vier ersten Pfosten den von links anfahrenden Zug in Betracht zu ziehen. Für den dritten und vierten sind demgemäss die beiden letzten Maxima der Figur 4 (bei 9 und 10) in negativem Sinne an die Eigengewichtskräfte anzufügen. Für den ersten und zweiten Pfosten ist die Eigengewichtskraft allein massgebend. Sämtliche Kräfte sind in der Figur 6 durch kleine Ringe begrenzt.

Hinsichtlich der Minimalspannung der übrigen Verticalen endlich, welche an Fächer mit gekreuzten Diagonalen stossen, gelten die Erörterungen der Nummer 10. Nach den daselbst für oben liegende Fahrbahn abgeleiteten Gesetzen tritt der kleinste Druck in einem dieser Pfosten ein, wenn die anstossenden Felder unbelastet sind und die nach der Mitte fallende Diagonale spannungslos ist. Dann aber hat der Pfosten nichts anderes als das auf seinen oberen Endpunkt entfallende Eigengewicht zu tragen. Der Minimaldruck des fünften und sechsten Pfostens beträgt somit in unserem Beispiele $^2/_3\, g f = 3{,}67\, t$.

Beachtenswert ist, dass die Pfosten hier niemals auf Zug in Anspruch genommen werden, was übrigens, wie man leicht erkennt, auch bei unten liegender Fahrbahn gilt.

Hiermit sind für sämtliche Stäbe des Fachwerkes die grössten und kleinsten aller möglichen Kräfte bestimmt, und unsere Aufgabe kann als gelöst betrachtet werden. Zur besseren Uebersicht haben wir noch in der Figur 1 die ermittelten Kräfte, auf ganze Tonnen abgerundet, in Zahlen eingetragen; das + Zeichen bedeutet Zugkräfte, das — Zeichen Druckkräfte.

Wir haben auf der Tafel 1 die in den Streben wirkenden Kräfte in zwei besonderen Figuren zusammengestellt; es geschah dies jedoch nur der Uebersichtlichkeit wegen. Wird mehr Gewicht auf rasche Arbeit gelegt, so wird man die Figuren 5 und 6 mit der Figur 4 vereinigen, indem man der schiefen Geraden der Eigengewichtskräfte die einzelnen Werte entnimmt und sie an die in der Figur 4 bestimmten Maxima anfügt.

Nimmt man an, die Fahrbahn befinde sich in der Höhe der unteren Gurtung, so ändern sich nur die Pfostenkräfte. Da in diesem Falle die grössere Hälfte des Eigengewichtes auf die unteren Knoten trifft, so hat man die vom eigenen Gewichte herrührenden Kräfte um ein $^1/_6 f$, beziehungsweise $^1/_4 f$ rechts von jedem Pfosten abzugreifen, jenachdem man $^2/_3$ oder $^3/_4$ des Gewichtes der unteren Gurtung zuteilt. Für den Anfangspfosten ist vom Auflagerdruck $^1/_3 g f$, beziehungsweise $^3/_8 g f$ abzuziehen. Sodann ist bezüglich der zufälligen Lasten (abweichend vom vorigen Fall) für die erste Verticale die für die erste Diagonale bestimmte Maximalkraft, für die zweite Verticale die der zweiten Diagonalen zukommende massgebend u. s. w. Diese beiden Aenderungen haben zur Folge, dass die Pfostenkräfte wesentlich kleiner werden, als bei oben liegender Fahrbahn, wie dies übrigens zu erwarten stand. Die Minimalkraft für einen an Gegenstreben stossenden Pfosten wird, wie schon bemerkt, gleich dem Gewichte eines oberen Knotens, also gleich $^1/_3 g f$ beziehungsweise $^1/_4 g f$.

Ist endlich die Fahrbahn nicht an den Endpunkten der Pfosten, sondern dazwischen befestigt, so ist der untere Teil der Pfosten für oben liegende, der obere für unten liegende Fahrbahn zu berechnen.

13. Der Parallelträger mit gleichförmig verteilter Belastung.

In der Praxis wird nicht immer so scharf und genau gerechnet, wie es in der vorigen Nummer geschehen ist. Vielfach wird von der Bestimmung der Minimalkräfte Abstand genommen, obschon dies nach den neueren Dimensionirungsmethoden als ein Mangel zu bezeichnen ist. Sodann wird der statischen Berechnung von Eisenbahnbrücken häufig eine gleichförmig verteilte Belastung zu Grunde gelegt. Der hierbei begangene Fehler ist gering, vorausgesetzt, dass sogenannte aequivalente Belastungswerte angewendet werden, das heisst solche Werte, die hinsichtlich des grössten Momentes und der

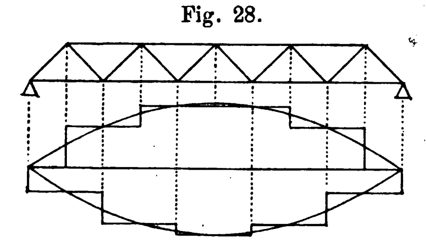
grössten Querkraft dieselbe Wirkung ausüben wie die Einzellasten. Der zur Berechnung der Querkräfte verwendete Wert von p ergibt sich hierbei stets grösser als der für die Momente dienende, was merkwürdigerweise noch oft übersehen wird. Da ausserdem bei Strassenbrücken (kleine Spannweiten ausgenommen) stets mit gleichförmig verteilter Last gerechnet werden darf, weil hier gedrängt stehende Menschen die grösste Belastung bilden, so wollen wir diese Berechnungsart noch besonders besprechen.

In Bezug auf die Gurtungen ist wenig Neues beizufügen. Man zeichnet über und unter einer Abscissenlinie von der Länge l je zwei Parabeln, die eine mit der Pfeilhöhe $\frac{g\,l^2}{8\,h}$, die andere mit der Pfeilhöhe $\frac{q\,l^2}{8\,h}$, worin q gleich $g+p$, gleich der Summe von eigener und zufälliger Belastung ist; dann schliesst man gleich wie auf der Tafel 1_2 an diese Parabeln Staffellinien an, deren horizontale Strecken den Fachlängen entsprechen.

Falls die schiefen Streben gegen die Mitte nicht fallen, wie auf der Tafel 1, sondern steigen (Fig. 25), hat man oben mit unten zu vertauschen; die Staffellinien für die obere Gurtung sind dann den Parabeln eingeschrieben, diejenigen für die untere umschrieben.

Kommen lauter schief gerichtete Streben vor, so entstehen ebenfalls Staffellinien; diese durchkreuzen jedoch die Parabeln sowohl oben als unten. Nebenstehende Figur zeigt, wie in diesem Falle vorzugehen ist.

Fig. 28.



Für diejenige Gurtung, welche die Fahrbahn trägt, erhält man hierdurch etwas zu grosse Kräfte, weil streng genommen, nicht die Kurve, sondern deren Sehnen massgebend sind. (Vgl. Nr. 36).

Für die Streben ergibt sich bezüglich der ungünstigsten Belastung ein einfaches Gesetz.

Bestimmt man nämlich analog der Figur 18 (Seite 29) den Punkt C, bis zu dem die gleichförmig verteilte Last vorgeschoben werden muss, wenn die vom Schnitt getroffene Strebe ihre grösste oder kleinste Spannung erfahren soll (Fig. 29), so wird die Spannweite durch den Punkt C in zwei Teile a und b geteilt, die sich zu einander verhalten wie die Teile a' und b', in welche das be-

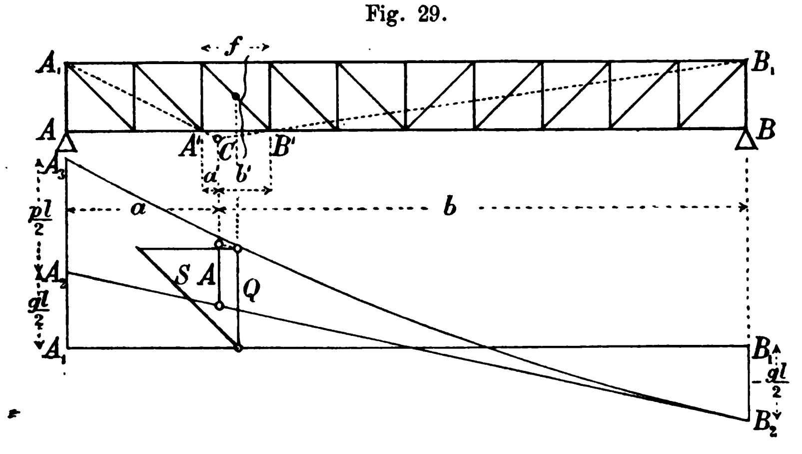
treffende Fach zerlegt wird; denn es verhält sich aus geometrischen Gründen $A_1 C : B_1 C = A' C : B' C$ oder, wenn man an Stelle der schiefen Linien ihre Horizontalprojectionen setzt, $a : b = a' : b'$.

Machen wir nun wie früher die Annahme, dass die zwischen A' und B' befindlichen Lasten sich vermittelst eines kleinen secundären Trägers auf die benachbarten Knotenpunkte übertragen, so haben wir hier zwei Träger vor uns, die auf proportionalen Strecken belastet sind. Der Druck auf den Knotenpunkt A' verhält sich also zum Auflagerdruck A, wie die Länge $A'B'$ zur Länge AB, oder es ist, wenn das Fachwerk in n gleiche Felder geteilt ist, $A' = \frac{1}{n} . A$. Nun ist aber für den angenommenen Querschnitt die Scherkraft gleich $A - A'$; sie ergibt sich daher einfach dadurch, dass man die Kurve der Auflagerdrücke zeichnet und von der unter C gefundenen Ordinate den n^{ten} Teil abzieht.

Aus obiger Proportion folgt ferner $a : b = AA' : B'B$; man findet daher die Punkte C auch dadurch, dass man, gleich lange Fächer vorausgesetzt, die Spannweite in $n-1$ gleiche Teile teilt.

Die Berechnung der Strebenkräfte gestaltet sich jetzt folgendermassen: Man zeichnet (Figur 29) unter dem Fachwerke die Kurve der grössten Querkräfte, indem man von der Linie $A_1 B_1$ aus

Fig. 29.



links $\frac{1}{2} gl + \frac{1}{2} pl$, rechts $- \frac{1}{2} gl$ aufträgt, A_2 mit B_2 durch eine Gerade verbindet und durch A_3 eine Parabel zieht, welche die Gerade in B_2 berührt. Dann bestimmt man für die in Frage stehende Diagonale den Punkt C, findet lotrecht darunter den von

der zufälligen Last herkommenden Auflagerdruck A und fügt $^9/_{10}$ von diesem an die unter der Strebenmitte abgegriffene Eigengewichtskraft an. Endlich wird, um die Kraft S zu erhalten, die Querkraft Q nach bekannter Regel zerlegt. Auf dieselbe Weise können auch die Minimalkräfte der Diagonalen gefunden werden.

Hinsichtlich der Pfosten geht man ebenso wie in der vorigen Nummer vor. Man greift bei unten liegender Fahrbahn um $^1/_6 f$ rechts vom Pfosten die Eigengewichtskraft ab und fügt die der Nachbarstrebe zukommende Querkraft an. Offenbar gelangt man zu dem nämlichen Resultate, wenn man einfach zu der schon bestimmten Kraft Q die Grösse $^1/_3 g f$ addirt. Bezüglich der kleinsten Pfostenkräfte gilt das in der vorigen Nummer Gesagte.

Legt man besonderes Gewicht auf möglichst rasche Arbeit, so kann man kurzweg die Mitte jeder einzelnen Strebe (Pfosten inbegriffen) in die Kurve der Maximalkräfte hinunter loten und die betreffende Ordinate als massgebende Scherkraft ansehen. Man erhält hierbei die grössten Strebenkräfte durchgehends etwas zu gross.

Die Strebenkräfte können auch nach dem *Herzog*'schen Verfahren (S. 30) bestimmt werden. Doch wird dadurch beim Parallelträger wenig gewonnen. Im Gegenteil wird die allmälige Abnahme der Kräfte, welche aus der Parabel der Figur 29 so klar in die Augen springt, etwas verdeckt.

14. Das Fachwerk mit parabolisch gekrümmter Gurtung.

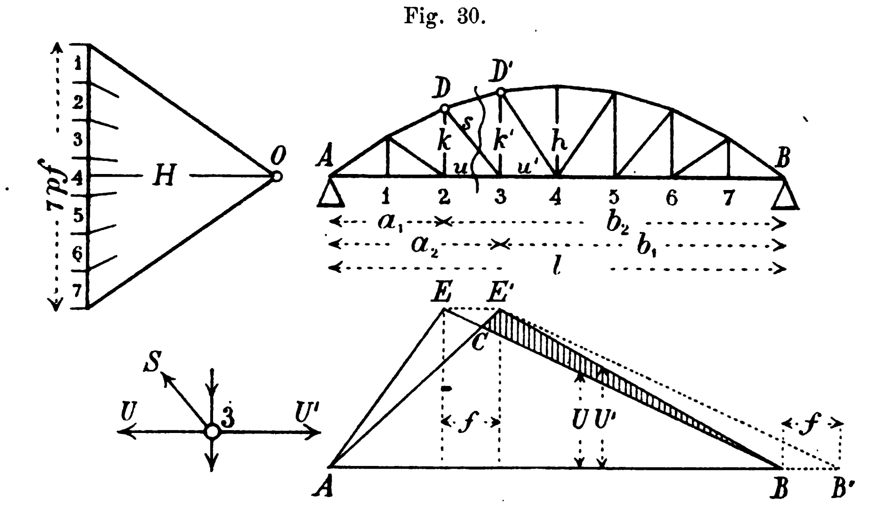
Zwei Umstände sind es namentlich, die bei den eisernen Fachwerken zu Gunsten krummliniger oder besser gesagt, gebrochener Streckbäume sprechen. Erstens kann bei den Parallelträgern der Querschnitt der Streckbäume der rasch wechselnden Kraft nicht so genau angepasst werden, wie es behufs Materialersparnis wünschenswert wäre; zweitens können die Fachwerke mit gebogenen Gurtungen bei gleicher Verticalsteifigkeit eine grössere Höhe und damit in der Mitte kleinere Gurtungsquerschnitte erhalten. Nimmt man noch hinzu, dass die Strebenkräfte bei gekrümmten Streckbäumen durchschnittlich kleiner werden als bei parallelen, so erscheint es begreiflich, dass die Parallelträger trotz ihrer geringeren Montirungskosten in manchen Fällen, namentlich bei grossen Spannweiten, vor den Fachwerken mit polygonaler Gurtung zurücktreten müssen.

Wir besprechen zunächst die Fachwerke mit parabolisch gebogener Gurtung.

Meistens ist bei diesen die obere Gurtung gekrümmt, die untere gerade, seltener umgekehrt. Dass beide Streckbäume einer Parabel angepasst werden, ist unseres Wissens bis jetzt nur bei Dachstühlen (bei Sichelträgern, Nr. 23) vorgekommen.

Ob die gekrümmte Gurtung einer Parabel um- oder eingeschrieben wird, führt bei gleich langen Fächern ganz auf das nämliche Gebilde und macht auch bei ungleichen Fächern wenig aus; doch wird man der Bequemlichkeit wegen das Einschreiben bevorzugen.

Fig. 30.



Je nachdem die beiden Streckbäume sich an den Auflagern begegnen oder daselbst noch durch Pfosten getrennt sind, mit andern Worten, je nachdem das Fachwerk an den Enden spitz oder stumpf ist, nennt man es »Parabelträger« oder »Halbparabelträger«. Zunächst möge die erstere Form einer näheren Betrachtung unterzogen werden.

Die charakteristischen Eigenschaften des Fachwerkes mit parabelförmig gekrümmter Gurtung und spitzen Enden treten besonders hervor, wenn man der statischen Berechnung gleichförmig verteilte Belastung zu Grunde legt.

Um diese Eigenschaften abzuleiten, denken wir uns zunächst das eigene Gewicht der Construction gleich null und lassen nur die veränderliche Belastung wirken. Ferner denken wir uns diese vorläufig

über die ganze Oeffnung ausgebreitet. Dann findet man die in diesem Falle auftretenden inneren Kräfte auf folgende einfache Weise: Auf jeden unteren Knotenpunkt entfällt die Last $p\,f$. Bildet man nun (Figur 30) aus den sieben Knotenpunktslasten ein Kräftepolygon, zieht durch dessen Endpunkte Parallelen zum ersten und letzten Stab der oberen Gurtung und verbindet den Schnittpunkt O dieser Parallelen mit den Teilpunkten des Kräftepolygons, so stellen die Strahlen aus O die aufeinander folgenden Kräfte in der oberen Gurtung und der Horizontalstrahl H die (constante) Kraft in der unteren Gurtung dar. Ferner wirkt in jeder Verticalen die Zugkraft $p\,f$, während die Spannung der Diagonalen durchgehends gleich null ist.

Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptung daraus, dass die auf solche Weise bestimmten Stabkräfte mit den äusseren Kräften in jedem Knotenpunkte im Gleichgewichte stehen. Die obere Gurtung wirkt hier als ein materielles Seilpolygon, welches die an den Verticalen aufgehängten Knotenpunktslasten trägt, und die untere Gurtung kann man sich als ein Zugband vorstellen, das den horizontalen Schub der oberen Gurtung aufhebt.

Sodann lässt sich leicht erkennen, dass, gleich lange Felder vorausgesetzt, jede Streckbaumkraft der Länge des Stabes, in dem sie wirkt, proportional ist. Den Gesetzen des Seilpolygons entsprechend stellt das Produkt $H h$, in welchem h die Fachwerkshöhe bedeutet, das Biegungsmoment in der Mitte der Oeffnung dar; da dieses auch gleich $^1/_8\,p\,l^2$ ist, so ergibt sich $H = \frac{pl^2}{8\,h}$. Man hat daher die Länge jedes Gurtungsstabes mit $\frac{p\,l^2}{8\,h\,f}$ zu multipliciren, um die in ihm wirkende Kraft zu erhalten.

Das Gesagte gilt ebenso gut, wenn man p durch g, die zufällige Last durch das eigene Gewicht ersetzt; nur haben die Pfosten in diesem Falle bloss den auf die unteren Knoten entfallenden Teil des Eigengewichtes zu tragen. Wir können uns daher so aussprechen:

Hat ein Parabelträger mit gleich langen Fächern gleichförmig verteilte Last zu tragen, so sind die Diagonalen sowohl bei vollständig belastetem als bei unbelastetem Fachwerke spannungslos; die Verticalen werden durch die den unteren Knoten zu-

fallenden Lasten auf Zug beansprucht, und die in den Gurtungsstäben wirkenden Kräfte findet man, wenn man die Stablängen mit $\frac{ql^2}{8hf}$, beziehungsweise $\frac{gl^2}{8hf}$ multiplicirt.

Einem ähnlichen Gesetze folgen die in den schiefen Streben wirkenden Maximal-Kräfte; auch diese sind den Längen der betreffenden Streben proportional.

Um dies zu beweisen, setzen wir zuerst die wagrechten Seitenkräfte der an einem unteren Knotenpunkte angreifenden Kräfte gleich null. Nennt man (Fig. 30) für den Knotenpunkt 3 die Strebenkraft S und die Kräfte in den angrenzenden Gurtungsstäben U und U', so erhält man

$$S \frac{f}{s} + U = U' \qquad \text{oder}$$

$$S = \frac{s}{f} \left(U' - U\right).$$

Man sieht hieraus, dass S dem Unterschiede der beiden Gurtungskräfte proportional ist und demzufolge am grössten wird, wenn dieser Unterschied seinen grössten Wert erreicht.

Um den Maximalwert von $U' - U$ zu finden, zeichnen wir für die beiden Gurtungskräfte die »Einflusslinien«.

Wir denken uns, eine einzelne Last wandere über den Träger von A nach B, und sehen nach, wie sich während dessen die Kraft U ändert. Nach dem Momentensatze (Nr. 6) ist diese Kraft gleich dem Biegungsmomente für den Knotenpunkt D, geteilt durch die Länge des Pfostens k. So lange sich die Last links vom Knotenpunkte 2 befindet, ist dieses Moment gleich dem Auflagerdrucke B mal dem Hebelarme $B\,2$. Es nimmt zu, und zwar linear, wenn sich die Last dem Knotenpunkte nähert. Sobald die Last den Knotenpunkt überschritten hat, ist das Moment gleich dem Auflagerdrucke A mal dem Hebelarme $A\,2$ und nimmt nun wieder ab, bis die Last nach B gelangt.

Trägt man von einer Abscisse $A\,B$ aus (Fig. 30 unten) die wechselnde Grösse von U als Ordinate auf, und zwar jeweilen in der Verticalen der Last, so erhält man eine gebrochene gerade Linie $A\,E\,B$. Diese Linie heisst die Einflusslinie für die Stabkraft U. Sie zeigt übersichtlich, wie sich U ändert, während sich die Last von einem Auflager zum andern bewegt.

Mit Hülfe dieser Linie kann man nun auch den Einfluss von gleichförmig verteilter Last ermitteln. Offenbar stellt der Flächeninhalt des Dreieckes ABE die Grösse von U dar für den Fall, dass die ganze Oeffnung gleichförmig belastet ist.

Zeichnet man gleicherweise die Einflusslinie für die Kraft U', so erhält man die Linie $AE'B$, und auch hier entspricht der Flächeninhalt des Dreieckes ABE' der Kraft U' für vollständige Belastung.

Bei vollständiger Belastung sind aber beim Parabelträger beide Kräfte gleich gross und zwar gleich $\frac{pl^2}{8h}$. Die beiden Dreiecke haben demnach gleichen Flächeninhalt; EE' ist parallel AB.

Aus dieser Darstellung ergibt sich jetzt auch der Wert $U'-U$; er entspricht dem Ordinatenunterschiede der beiden Einflusslinien. Dieser Unterschied ist links von C negativ, rechts davon positiv. Er wird am grössten, wenn die gleichförmig verteilte Last von C bis B reicht. In diesem Falle ist $U'-U$ dem Flächeninhalte des kleinen schraffirten Dreieckes BCE' proportional. Dieser Inhalt verhält sich zu demjenigen des Dreieckes ABE' wie CE' zu AE' oder, wenn man $E'B'$ parallel zu EB zieht, wie BB' zu AB' oder wie f zu $l+f$.

Hieraus folgt, dass das Maximum von $U'-U$ gleich

$$\frac{f}{l+f} \cdot \frac{pl^2}{8h}$$

oder endlich die grösste in der Strebe herrschende Kraft

$$S = \frac{pl^2}{8h(l+f)} \cdot s \qquad \text{ist.}$$

Beim Parabelträger ist die in einer Diagonale wirkende grösste Kraft gleich der Länge der Diagonalen, multiplicirt mit $\frac{pl^2}{8h(l+f)}$.

Der abgeleitete Ausdruck gibt ebenso wohl die grösste Zugkraft als auch die grösste Druckkraft an, welche in einer Strebe auftreten können. Denn beide Kräfte sind nur von der zufälligen Last abhängig; die eine tritt bei rechtsseitiger, die andere bei linksseitiger Belastung auf; ihre Summe muss aber, da die vollständige Belastung wirkungslos ist, gleich null sein.

Man ersieht hieraus, dass sämtliche Diagonalen eines Parabelträgers, wenn sie einzeln vorhanden sind, sowohl auf Zug als auf Druck widerstehen müssen. Will man dieser Doppelwirkung ausweichen, so muss man in sämtlichen Fächern Gegenstreben anbringen und die Stäbe derart einrichten, dass sie nur in einem Sinne wirken können. (Flach- oder Rundeisen bei eisernen Fachwerken.) Die Minimalspannung ist in diesem Falle stets null. (Vgl. S. 32.)

Obiger Ausdruck für die grösste Strebenkraft gibt den genauen Wert derselben an, das heisst, denjenigen Wert, welchen man erhält, wenn auf das Hineintreten der zufälligen Last in das betreffende Fach Rücksicht genommen wird. Vielfach wird die vereinfachende Annahme gemacht, dass bei der ungünstigsten Belastung die rechts vom Schnitte liegenden Knotenpunkte voll belastet, die links davon liegenden ganz unbelastet seien. Unter dieser nicht ganz richtigen Voraussetzung findet man

$$S = \frac{p\,l\,s}{8\,h},$$

also etwas mehr als oben.

Für die Berechnung der grössten Pfostenkräfte besteht leider keine so einfache Regel. Zwar nimmt die Maximaldruckkraft in einem Pfosten mit wachsender Länge desselben ebenfalls zu; das Verhältnis der Kraft zur Länge ist jedoch nicht mehr fest. In der Praxis fällt dieser Umstand weniger ins Gewicht, da sehr oft sämtliche Pfosten denselben Querschnitt erhalten. Man kann sich daher manchmal darauf beschränken, die im längsten, das heisst im Mittelpfosten wirkende Kraft zu bestimmen. Uebrigens genügt es für eine oberflächliche Rechnung, die grössten Druckkräfte in den Pfosten dadurch zu ermitteln, dass man die für die Streben gefundenen Kräfte parallel zum Pfosten und zur unteren Gurtung zerlegt. Man erhält dann, wie man leicht erkennt, stets etwas zu grosse Werte. Auch kann man die für die Streben gültige Formel einfach auf die Pfosten übertragen; die Ergebnisse sind auch in diesem Falle stets grösser als die genauen.

Was endlich die in den Verticalen vorkommenden grössten Zugkräfte betrifft, so entstehen diese für sämtliche Pfosten dann, wenn das ganze Fachwerk belastet ist; denn in diesem Falle sind sämtliche Diagonalen spannungslos; die auf der Seite 35 verlangte Bedingung wird daher erfüllt. Dann aber hat jede Verticale einfach die auf ihren unteren Endpunkt entfallende Last zu tragen. Uebrigens sieht man auch direkt ein, dass bei jeder anderen Be-

lastung in einer der am Pfostenfusse angreifenden Diagonalen eine Zugkraft entsteht, welche die in der Verticalen vorhandene Zugspannung verringert.

Werfen wir nun unsern Blick noch auf Parabelträger, welche eine gegebene Reihe von Einzellasten zu tragen haben, so ist es klar, dass die abgeleiteten Beziehungen zwischen der Länge der Gurtstäbe und Diagonalen einerseits und der in ihnen herrschenden Spannungen andrerseits nicht mehr genau eintreffen können. Bis zu einem gewissen Grade werden sie sich indessen auch hier bewähren und können deshalb zu einer angenäherten Berechnung passend Verwendung finden. Will man jedoch die in den einzelnen Stäben wirkenden Spannungen genau kennen, so hat man das allgemein gültige Verfahren zur statischen Berechnung von Fachwerken anzuwenden. Wir wollen auf diese Aufgabe hier nicht näher eintreten, da sie sich von der in der Nummer 17 behandelten in nichts unterscheidet.

15. Kräfteplan eines Halbparabelträgers.

(Tafel 2.)

Wenn die eine Gurtung des Fachwerkes geradlinig, die andere parabolisch gekrümmt ist, beide jedoch an den Auflagern noch um eine gewisse Strecke voneinander abstehen, nennt man das Fachwerk »Parabelträger mit abgestumpften Enden« oder kürzer »Halbparabelträger«. Die einfache, dem Auge wohlgefällige Form dieses Fachwerkes, verbunden mit verhältnismässig geringem Materialbedarf hat demselben eine ziemlich grosse Verbreitung verschafft. In statischer Hinsicht besitzt der Halbparabelträger dagegen keine hervorragenden speziellen Eigenschaften, wie wir sie für den Parabelträger gefunden haben; er muss vielmehr nach dem allgemein gültigen Verfahren berechnet werden.

Wir haben diese Aufgabe auf der Tafel 2 für ein spezielles Beispiel durchgeführt, und zwar unter der Annahme gleichförmig verteilter Belastung.

Die Spannweite des Fachwerkes betrage 50 *m*, seine Höhe in der Mitte 6 *m* und an den Enden 3 *m*. Die Länge der Endfächer sei gleich 3 *m*, diejenige der übrigen gleich 4 *m*. Die obere Gurtung

sei einer Parabel eingeschrieben. Als Belastung der einen Tragwand haben wir für den laufenden Meter das eigene Gewicht $g = 3{,}0\,t$ und die Verkehrslast $p = 1{,}8\,t$ angenommen.

a) Gurtungen.

Wir beginnen unsere Arbeit damit, dass wir die vom Eigengewichte hervorgerufenen inneren Kräfte ermitteln. Zu diesem Zwecke wenden wir am besten das im ersten Kapitel (S. 8) beschriebene Cremona'sche Verfahren an.

Wir tragen (Fig. 2) die an den einzelnen Knotenpunkten angreifenden Kräfte lotrecht auf, wobei wir dem Umfange des Fachwerkes folgen. Dabei denken wir uns $^5/_6$ der Eigenlast an den unteren und $^1/_6$ an den oberen Knotenpunkten wirkend. Es trifft somit auf jeden unteren Knoten eine Last von $^5/_6 \,.\, 4 \,.\, 3{,}0 = 10{,}00\,t$ und auf jeden oberen eine solche von $^1/_6 \,.\, 4 \,.\, 3{,}0 = 2{,}00\,t$. Eine Ausnahme bilden der kürzeren Endfächer wegen die vier ersten und die vier letzten Punkte, und zwar haben die untern Punkte der Pfosten 2 und 13 nur $8{,}75\,t$, die oberen $1{,}75\,t$, die untern Knoten 1 und 14 je $3{,}75\,t$ und die oberen je $0{,}75\,t$ zu tragen. Die Gesamtlast ergibt sich somit gleich $10 \,.\, 10{,}00 + 10 \,.\, 2{,}00 + 2 \,.\, 8{,}75 + 2 \,.\, 1{,}75 + 2 \,.\, 3{,}75 + 2 \,.\, 0{,}75 = 150{,}00\,t$ und der Auflagerdruck gleich $75{,}00\,t$. Von letzterem zieht man am besten die auf 1, beziehungsweise 14 entfallenden Gewichte sofort ab und trägt daher $A = B = 75{,}00 - 3{,}75 = 71{,}25\,t$ auf.

Nach Erledigung dieser Arbeit beginnt das Zerlegen der Kräfte in der Weise, dass, dem Strebenzuge folgend, in jedem Knotenpunkte Gleichgewicht hergestellt wird.

Im ersten Pfosten wirkt offenbar einfach der Auflagerdruck A; der Stab 1 2 bleibt spannungslos. Im ersten oberen Knoten greifen die betreffende Knotenlast und drei Stabkräfte an, von denen eine schon bekannt ist; wir ziehen daher durch die Endpunkte der Kraft A—1 Parallelen zur ersten Strebe und zum ersten oberen Gurtungsstabe, bilden ein geschlossenes Polygon, und erhalten dadurch die beiden anderen Kräfte. (Der Schnittpunkt dieser Parallelen ist mit 2 bezeichnet.) Hierauf wird für den Punkt 2 ein ebensolches Polygon gebildet. Von den fünf daselbst sich begegnenden Kräften sind drei bekannt, nämlich die linke Gurtungskraft (null), die Diagonalkraft und die Last 2; auch hier findet man somit die beiden

unbekannten Kräfte durch zwei zu denselben parallele Linien. In gleicher Weise wird der obere Knoten des zweiten Pfostens, dann der Punkt 3 behandelt und damit bis etwas über die Mitte des Fachwerkes hinaus fortgefahren. Für spätere Zwecke ist es nämlich notwendig, die Arbeit so weit zu führen, als noch Gegenstreben vorhanden sind, also bis zum achten Fache, und zwar ist dabei stets die nach rechts fallende Diagonale als massgebend anzusehen. Die Diagonale des mittelsten Faches wird hierbei spannungslos.

Welchen Sinn die einzelnen Kräfte besitzen, kann nach früher (Seite 9) durch Eintragen der Pfeile ermittelt werden. Man erkennt hierbei bald, dass sämtliche unteren Gurtungsstäbe, sowie die Diagonalen auf Zug, die oberen Gurtungsstäbe und die Pfosten auf Druck in Anspruch genommen werden. Für die Streben ändert sich dieses Gesetz jedoch von dem Punkte an, wo (Figur 2) in der Zickzacklinie 2, 3, 4 ..... die Verticalen zu steigen beginnen, also von 7 an.

Die Nummerirung der Figur 2 ist derart gewählt, dass die oberen Streckbaumkräfte am linken Endpunkte die Nummer ihres Drehpunktes tragen, während den unteren die Nummern ihrer jeweiligen Endpunkte beigeschrieben sind. Die Strebenkräfte sind je durch die Ziffer des unteren Endpunktes der Strebe bezeichnet.

Durch die Figur 2 sind sämtliche vom Eigengewichte herrührenden Stabkräfte und damit zugleich die in den Gurtungen wirkenden Minimalkräfte bestimmt. Ausserdem können wir der Figur 2 auch die Maximalkräfte der Streckbäume entnehmen. Denn da die zufällige Last gleichwie das eigene Gewicht gleichförmig verteilt ist, so verhalten sich die kleinsten Gurtungskräfte zu den grössten wie $g : g + p = 3{,}0 : 4{,}8$. Wir erhalten daher die grössten Streckbaumkräfte einfach dadurch, dass wir die Kräfte der Figur 2 im Massstab $1\,mm = \frac{4{,}8}{3{,}0} = 1{,}6\,t$ abgreifen.

Beide Werte sind, auf ganze Tonnen abgerundet, in der Figur 1 eingeschrieben worden; ebenso die vom Eigengewichte herrührenden Strebenkräfte, diese jedoch in Klammern, da sie weder Maxima noch Minima darstellen.

Die Ergebnisse der Figur 2 können auch mittelst des Zimmermann'schen Verfahrens (Seite 15) gefunden werden. Mittelst eines Kräftepolygons, dessen Poldistanz gleich der n fachen Fachlänge ist, wird zuerst ein Seilpolygon für Eigengewicht gezeichnet; dann werden durch dessen Ecken Parallelen zu den

betreffenden Gurtungen und Diagonalen gezogen und so die Vierecke construirt, deren Seiten die Stabkräfte darstellen. (Vgl. Fig. 12, S. 16.) Im letzten Fache, welches nur 3 *m* misst, muss hierbei die Ordinate des Seilpolygons vorerst um $^1/_3$ vergrössert werden. Werden die Eigenlasten im Massstabe 1 *mm* = *m* Tonnen aufgetragen, so gilt für die Stabkräfte der Massstab 1 *mm* = *m* . *n* Tonnen.

b) Diagonalen.

Um die in den Streben wirkenden Kräfte zu finden, könnte man wie beim Parallelträger (Nr. 12) von der Kurve der grössten Querkräfte ausgehen. Auf den Seiten 28—30 und durch die Textfigur 18 ist das Verfahren näher erläutert. Im vorliegenden Falle, wo die Streben abwechselnd lotrecht und schief laufen, gelangt man jedoch durch das von Professor Dr. *Herzog* abgeleitete Verfahren (S. 30—31) rascher zum Ziele.

Nach den dortigen Entwicklungen findet man die grösste in einer Strebe wirkende Kraft auf folgende Weise: Um beispielsweise die Kraft in der vierten Diagonalen zu erhalten, bestimmt man nach der Textfigur 18 den Grenzpunkt C_{45} der ungünstigsten Belastung, bringt in diesem Punkte die Hälfte der auf die Strecke 5 B entfallenden zufälligen Last als Einzelkraft an, bestimmt die auf den Knoten 4 treffende secundäre Auflagerkraft und zerlegt sie nach den Richtungen der drei geschnittenen Fachwerkstäbe U, O und S. Wir wollen die genannte Einzelkraft $^1/_2\, p\,.\,(5\,B)$ kurz mit C und die aus ihr entspringenden Belastungen der Knoten 4 und 5 mit A' und B' bezeichnen. Nun geht in unserem Falle die Kraft A' durch den oberen Endpunkt der schiefen Strebe; bei obiger Zerlegung bleibt somit die untere Gurtung spannungslos. Infolgedessen lässt sich das Verfahren noch kürzen. Da nämlich die Kraft C die Mittelkraft von A' und B', A' hinwiederum die Mittelkraft von S und O ist, so gelangt man zur Strebenkraft auch dadurch, dass man die Kraft C in drei Einzelkräfte zerlegt, von denen die eine mit der Strebe, die andere mit der oberen Gurtung und die dritte mit dem Pfosten 5 zusammenfällt. Daraus ergibt sich folgende Regel:

Man lege im Grenzpunkte der ungünstigsten Belastung die Kraft $^1/_2\, p\,.\,(5\,B)$ auf, bringe sie mit der Strebe zum Schnitt und zerlege sie parallel zur

Strebe und nach dem Schnittpunkte von Gurtung und Pfosten in zwei Seitenkräfte.

Zunächst ziehen wir (Fig. 3) eine wagrechte Linie $A\ B$, tragen über A die Kraft $\frac{1}{2}\, p\, l = 45\ t$ auf und verbinden den Punkt A_1 mit B. Dann schneidet die Verbindungslinie lotrecht unter jedem Pfosten die Kraft C ab. Der Massstab der Kräfte ist hier $1\ mm = \frac{1}{2}\ t$.

Sodann bestimmen wir in der Figur 1 für sämtliche Diagonalen den Grenzpunkt C (vergl. die Textfig. 18) und loten ihn hinauf nach der Strebe. Speziell für die vierte Strebe sind die betreffenden Linien eingezeichnet; sie führen auf den Punkt S. Dieser Punkt wird mit dem oberen Endpunkte des Pfostens 5 verbunden und hierauf in der Figur 3 die Ordinate 5 parallel zur Strebe und zu dieser Verbindungslinie zerlegt. Damit ist die gesuchte Strebenkraft gefunden; sie ist etwas stärker ausgezogen und trägt die Zahl 4 5.

Diese Arbeit wird nun für sämtliche acht nach rechts fallenden Diagonalen (1 2 bis 8 9) durchgeführt. Die dazu nötigen Hülfslinien sind zum Teil wieder ausgelöscht worden.

Mit Hilfe des zugehörigen Massstabes werden sodann die ermittelten Kräfte in Zahlen ausgedrückt und zu den vom Eigengewichte herrührenden Kräften addirt. Beispielsweise ruft in der Strebe 4 5 das Eigengewicht die Kraft $25\ t$, die ungünstigste zufällige Last die Kraft $20\ t$ hervor; die Gesamtspannung beträgt daher $45\ t$.

Man sieht, dass die Gesamtkraft von Fach zu Fach abnimmt und im neunten Fache negativ würde. Daraus folgt, was bis jetzt noch unbestimmt war, dass von diesem Felde an die Gegenstreben überflüssig sind.

Was die Minimalkräfte der Diagonalen betrifft, so sind diese in den Feldern mit Gegenstreben (vergl. Seite 32) gleich null; man hat sich daher nur noch mit den fünf äusseren Feldern zu befassen.

Die Grenzpunkte der ungünstigsten Belastungen sind selbstverständlich die nämlichen wie früher; doch ist jetzt an Stelle der rechten Seite des Trägers die linke zu belasten.

Um die Figur 3 nicht doppelt zeichnen zu müssen, übertragen wir die Grenzpunkte symmetrisch auf die andre Seite und wiederholen dort die frühere Construction; dabei tritt jedoch, wie man bei

einiger Ueberlegung bald erkennt, an Stelle des oberen der untere Endpunkt des rechtsseitigen Pfostens. So erhält man beispielsweise für die Strebe 4 5 im neunten Fache den Punkt C'_{45} und auf der Strebe den Punkt S'. Nun wird in der Figur 3 die Ordinate 11 parallel zur Strebe und zur Verbindungslinie S' 11 zerlegt. Schliesslich wird das mit 4′ 5′ bezeichnete Ergebnis (es sind 6 t) von der Eigengewichtskraft abgezogen und der Unterschied (19 t) in der Figur 1 als Minimalkraft eingetragen.

Für die Strebe 1 2 wird die Minimal-Belastung offenbar null; hier stellt daher die eingeklammerte Zahl zugleich die kleinste Kraft dar.

Die kleinsten Spannungen der fünf ersten Streben kann man übrigens auch auf einem Umwege aus den grössten Spannungen ableiten. Denn da die beiden gefährlichsten Belastungen sich stets zur vollständigen Belastung ergänzen, so stellt die Summe beider Spannungen die Wirkung der vollständigen zufälligen Belastung oder, wenn man das Eigengewicht mitrechnet, die Wirknng der zufälligen Belastung mehr der doppelten Wirkung des Eigengewichtes dar. Bezeichnet man den Einfluss des Eigengewichtes mit S_g und denjenigen der vollen zufälligen Last mit S_p, so ist demnach $S_{max} + S_{min} = 2\,S_g + S_p$ oder $S_{min} = \left(2 + \frac{p}{g}\right) S_g - S_{max}$. Beispielsweise finden wir hiernach für die zweite Diagonale $S_{min} = 2{,}6 \,.\, 59 - 95 = 58\,t$. Andrerseits können diese Beziehungen auch zur Controlle der gefundenen Kräfte dienen.

Wir machen nochmals darauf aufmerksam, dass das *Herzog*'sche Verfahren nur dann genaue Resultate liefert, wenn in grossem Massstabe gezeichnet wird.

c) Pfosten.

Auch zur Bestimmung der Pfostenkräfte haben wir das *Herzog*'sche Verfahren angewandt.

Um beispielsweise den 5. Pfosten zu berechnen, denken wir durch das Fachwerk einen Schnitt gelegt, der die obere Gurtung 4 5 und die untere Gurtung 5 6 trifft. Verlängert man dann den geschnittenen Gurtungsstab bis A_1 und B_1 und zieht A_1 5 und B_1 6, so wird dadurch der Grenzpunkt C_5 der gefährlichsten Belastung bestimmt, vorausgesetzt, dass die Fahrbahn an den unteren Knotenpunkten befestigt ist. (Man beachte, dass die Belastungsgrenzen für die Pfosten mit denjenigen für die Streben nicht zusammenfallen.)

Zu der gesuchten Pfostenkraft gelangt man nun, indem man (vgl. S. 31) im Punkte C_5 die Last $^1/_2 p.(6\ B)$ auflegt, sie in zwei in den Knoten 5 und 6 wirkende Seitenkräfte teilt und die auf 5 treffende Seitenkraft nach den Richtungen der drei geschnittenen Stäbe zerlegt. Da aber diese Seitenkraft mit dem fraglichen Pfosten zusammenfällt, so ist eine Zerlegung unnötig; die durch den Punkt 5 gehende Seitenkraft von $^1/_2\ p.(6\ B)$ stellt ohne weiteres die gewünschte Pfostenkraft dar.

Die Ordinate 6 der Figur 3 ist gleich der Kraft $^1/_2\ p.(6\ B)$. Soll diese Kraft in zwei Teile zerlegt werden, die sich zueinander verhalten wie die Entfernungen der Knoten 5 und 6 vom Grenzpunkte C_5, so braucht man blos diesen Grenzpunkt nach der Figur 3 hinunter zu loten, die Ordinate 6 um eine Fachlänge nach links zu verschieben und in dem so entstandenen Rechtecke die Diagonale zu ziehen. Legt man noch durch den Schnittpunkt der beiden punktirten Linien eine Horizontale bis zur Ordinate 5, so wird dort die gesuchte Pfostenkraft abgeschnitten. Sie ist durch einen stärkeren Strich hervorgehoben und durch kleine Ringe begrenzt.

Das Eigengewicht ruft im 5. Pfosten einen Druck von 9 t, die ungünstigste zufällige Last einen Druck von 12 t hervor. Die grösste Druckkraft, welche der Pfosten aufzunehmen hat, beträgt somit 21 t.

In gleicher Weise sind die grössten Beanspruchungen der sechs übrigen Pfosten der linken Fachwerkshälfte ermittelt worden.

Um sodann die kleinste Druckspannung im Pfosten 5 zu erhalten, sollten wir die zufällige Last von A bis C_5 reichen lassen. Statt dessen übertragen wir den Grenzpunkt symmetrisch nach C'_5, belasten die Strecke $C'_5\ B$ und bestimmen den Einfluss dieser Belastung auf den Pfosten 10.

Die Zeichnung wird hier nicht ganz so einfach. Wir haben die Hälfte der auf die Strecke 10 B treffenden Belastung im Punkte C'_5 aufzulegen, die auf den Knoten 9 entfallende Auflagerkraft zu ermitteln und diese Kraft nach den Richtungen der drei geschnittenen Stäbe zu zerlegen. Da sich die Auflagerkraft mit dem Pfosten hier nicht deckt, so lässt sich diese Zerlegung nicht wie oben umgehen. Die Kraft $^1/_2\ p.(10\ B)$ wird in der Figur 3 durch die Ordinate 10 dargestellt. Die Lotlinie durch C'_5 und die Verbindungslinie 9(10) bestimmen die Seitenkraft 9. Diese Kraft zerlegt man parallel zur Gurtung 9 10 und zur Strebe 9 10

und hierauf die zweite Seitenkraft parallel zum Pfosten 10 und zum oberen Streckbaum 10 11. Das Ergebnis dieser doppelten Zerlegung trägt die Ziffer 5′ und weist eine Kraft von 8 *t* auf. Da das Eigengewicht den Pfosten mit 9 *t* beansprucht, so beträgt die kleinste Druckkraft 1 *t*. Für die Pfosten 11, 12 und 13 (beziehungsweise 4′, 3′ und 2′) sind die Hülfslinien ausgelöscht worden. In den beiden Endpfosten stellt die Eigengewichtskraft die kleinste Spannung dar.

Die auf der Seite 64 für die Diagonalen abgeleitete Beziehung zwischen grösster, kleinster und Eigengewichtsspannung kann auch auf die fünf ersten Pfosten angewandt werden. —

Der Vollständigkeit wegen haben wir schliesslich noch nach Anleitung der Nummer 10 die kleinsten Druckkräfte, beziehungsweise die grössten Zugkräfte der an Gegenstreben stossenden Pfosten 6 und 7 bestimmt. Fassen wir speziell den Pfosten 6 ins Auge.

Nach dem auf der Seite 35 stehenden Satze hat man die zufällige Last von links her so weit vorzuschieben, bis die Diagonalen 6 7 zum zweiten male spannungslos werden. Wo zur Erfüllung dieser Bedingung die Belastung endigen muss, braucht nichts ermittelt zu werden. Es genügt zu wissen, dass dieser Grenzpunkt rechts vom sechsten Fache liegt. (Er fällt fast genau in die Mitte der Spannweite.) Um die Pfostenkraft zu finden, bestimmen wir (vgl. S. 36 und Fig. 21) die Mittelkraft *P* der auf die Pfosten 1 bis 6 fallenden Belastung, Eigengewicht inbegriffen, und zerlegen sie in zwei Seitenkräfte, von denen die eine durch den Auflagerpunkt *A* geht, die andre mit dem oberen Gurtstab 6 7 zusammenfällt. Hierauf zerlegen wir letztere Kraft nochmals parallel zum Gurtstab 5 7 und zum Pfosten und ziehen von der lotrechten Seitenkraft das Gewicht eines oberen Knotenpunktes ab.

In der Figur 4 der Tafel 2 sind diese Zerlegungen ausgeführt. Die Kraft *P* umfasst die Belastung bis zur Mitte des sechsten Faches; sie berechnet sich demnach zu $(3{,}0 + 1{,}8) \,.\, 21 = 100{,}8\,t$ und liegt um 10,5 *m* vom Auflager entfernt (s. Fig. 1). Die doppelte Zerlegung führt hierauf zu der in der Figur 4 mit 6′ bezeichneten und stärker ausgezogenen Strecke. Diese Strecke misst 8 *t*; das Eigengewicht eines oberen Knotens beträgt 2 *t*; die gesuchte Pfostenzugkraft ergibt sich somit gleich 6 *t*.

Für den 7. Pfosten liegen die Verhältnisse einfacher. Die Belastungsgrenze fällt hier nach *B*, weil die Diagonalen des Mittelfaches erst bei dieser Belastung spannungslos werden. Die grösste Zugkraft im Pfosten 7 tritt daher bei Totalbelastung ein und ergibt sich, wenn man sie in der Figur 2 abgreift und 1,2 *t* hinzufügt, gleich 7,6 *t*. —

Wir haben das hier beschriebene Verfahren zur Ermittelung der Pfostenzugkräfte der Vollständigkeit wegen aufnehmen zu müssen geglaubt. In der Praxis wird man indessen selten so weit gehen, sondern sich bei den Pfosten meistens auf die Bestimmung der grössten Druckkraft beschränken,

um so mehr, als die Pfostenquerschnitte schon aus anderen Gründen in der Regel stärker ausgeführt werden, als die Berechnung der Stabkräfte erfordern würde. —

Mit diesem Vorgehen ist unser Zweck erreicht; die Figur 1 enthält jetzt die Maxima und Minima sämtlicher Stabkräfte und kann daher zur Berechnung der erforderlichen Querschnitte benützt werden.

16. Das Schwedler'sche Fachwerk.

Unter den Fachwerken mit polygonaler Gurtung stehen zwar, was Einfachheit der Form und des Berechnungsverfahrens betrifft, die Parabelträger obenan. Zu ihren Ungunsten spricht jedoch der Umstand, dass jedes Feld eine Gegenstrebe verlangt, und dass die Gurtungen an den Auflagern unter sehr spitzem Winkel zusammenlaufen. Diese Schattenseiten werden beim Halbparabelträger vermieden; das Bedürfnis nach Gegenstreben beschränkt sich, wie wir bei dem Beispiele der vorigen Nummer gesehen haben, auf einige mittlere Fächer. Ueberdies werden die in den Gurtungen herrschenden Kräfte infolge des grösseren Abstandes beider Gurtungen durchschnittlich kleiner als beim Parabelträger, so dass der gesamte Materialverbrauch trotz der stärkeren Streben beim Halbparabelträger in der Regel kleiner ausfällt. Unvorteilhaft sind indessen die verhältnismässig hohen Spannungen, welche die Diagonalen des Halbparabelträgers in den äussersten Fächern erfahren. (Vgl. Taf. $2_{2 \cdot 3}$.) Auch widerstrebt es dem sparsamen Sinne, die untere Gurtung bis an die Auflager durchzuführen, trotzdem ihre Spannung in den Endfächern gleich null wird.

Die Uebelstände beider Trägerformen beseitigt die vom Geheimen Baurat *J. W. Schwedler* im Jahre 1867 aufgestellte Fachwerksform. (Siehe Erbkams Zeitschr. f. Bauwesen 1868, S. 514.) Bei diesem Fachwerke sind »die Gurtungen am Ende zusammengeführt, und die Krümmung ist so gewählt, dass die Diagonalen nur auf Zug in Anspruch genommen werden.«

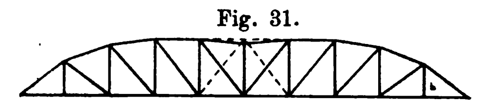
Um dieses Prinzip zu verstehen, erinnere man sich, dass die Kraft in einer Strebe dem statischen Momente der Querkraft bezogen auf den Drehpunkt der Strebe proportional ist und dass sie ihren grössten und kleinsten Wert bei einseitiger Belastung des Fachwerkes erreicht. Die beiden Grenzwerte haben entgegengesetztes

Zeichen, wenn die Querkräfte für links- und für rechtsseitige Belastung in entgegengesetzem Sinne um den Drehpunkt drehen: sie erhalten gleiches Zeichen, wenn die Momente der beiden Querkräfte gleichen Sinn haben. Im ersteren Falle muss man, wenn wechselnde Spannungen vermieden werden sollen, eine Gegenstrebe anbringen; im letzteren Falle ist die Gegenstrebe überflüssig. Man hat es nun in der Hand, durch geeignete Krümmung der Gurtungen dafür zu sorgen, dass die beiden Grenzspannungen der Strebe gleiches Zeichen erhalten. Krümmt man die Gurtungen derartig, dass der Drehpunkt einer Strebe mit der einen der beiden Querkräfte zusammenfällt, so wird der eine Grenzwert der Strebenkraft gleich null.

Auf dieser letzteren Bedingung wird nun das *Schwedler*'sche Fachwerk gewöhnlich aufgebaut. Die Gurtungen desselben werden so geführt, dass die Minimalkraft der Diagonalen gleich null wird.

Wird dieser Grundsatz in sämtlichen Feldern eines Fachwerkes festgehalten, so ergibt sich eine Form, wie sie die nebenstehende Figur zeigt. Die obere Gurtung senkt sich ein wenig gegen die Mitte hin. Da die hierbei entstehende Knickung sowohl constructiv als ästhetisch ungünstig ist, beseitigt man sie in der Praxis und zwar dadurch, dass man den oberen Streckbaum horizontal durchführt, wie es die gestrichte Linie andeutet. Durch diese Aenderung wird jedoch im mittleren Teile des Fachwerkes das *Schwedler*'sche Prinzip offenbar preisgegeben; das Fachwerk wird auf dieser Strecke zum Parallelträger und verlangt wie dieser in den mittleren Fächern Gegenstreben.

Fig. 31.



Es leuchtet ein, dass es zur Vermeidung der Gegenstrebe nicht gerade nötig ist, den Drehpunkt eines Faches genau in die eine Querkraft zu verlegen. *Schwedler* selbst sagt: »Die Diagonalen werden auf Zug nur wenig mehr in Anspruch genommen werden und die Doppeldiagonalen werden wenig mehr Felder umfassen, wenn man aus ästhetischen Rücksichten eine Korblinie oder Halbellipse und dgl. Kurve wählt, welche durch ihre Krümmungsverhältnisse wohlgefälliger ins Auge fällt.« Die Praxis hat sich jedoch meistens streng an das *Schwedler*'sche Gesetz gehalten und die in der That wenig gefällige Form der Figur 31 vorgezogen.

17. Kräfteplan des Schwedler'schen Fachwerkes.

(Tafel 3.)

Auf welche Weise die Form des *Schwedler'*schen Fachwerkes und die in den einzelnen Stäben wirkenden Kräfte bestimmt werden, erläutern wir am besten an einem Beispiele.

Die Tafel 3 enthält die betreffenden Zeichnungen. Als Beispiel haben wir ein Fachwerk von 48 *m* Spannweite und 6 *m* Höhe gewählt. Die 12 Felder haben eine Länge von je 4 *m*. Die zufällige Belastung bestehe aus zwei einander gegenüber stehenden Güterzügen, von denen der eine mit zwei, der andere mit einer Lokomotive bespannt ist. Die Radgewichte und -Entfernungen für Lokomotive und Wagen sind der Figur 7 zu entnehmen. Die eigene Last betrage 1,1 *t* auf den laufenden Meter.

a) Fachwerksform.

Unsere Arbeit beginnt mit der Bestimmung der Fachwerksform.

Die Zahl der inneren, mit Gegenstreben versehenen Felder schätzen wir vorläufig gleich vier und tragen sie mit der angenommenen Höhe von 6 *m* auf. Sollten wir uns in dieser Schätzung geirrt haben, so würde uns die nachfolgende Arbeit bald eines besseren belehren. Vom Pfosten 8 ausgehend wird sodann die Höhe des Nachbarpfostens 9, von diesem aus die Höhe des Pfostens 10 und schliesslich diejenige des Pfostens 11 bestimmt.

Um diese Aufgabe lösen zu können, haben wir die Kurve der Maximalquerkräfte nötig. Wir tragen daher (Tafel 3_2) von der Horizontalen durch O die Radgewichte eines Zuges mit zwei Lokomotiven im Massstabe 1 *mm* = 1 *t* nach oben hin auf und zeichnen (Figur 3) das entsprechende Seilpolygon. (Vergl. die Textfig. 17, Seite 25.) Den Polabstand des Kräftepolygons haben wir gleich der halben Spannweite angenommen; die Ordinaten der Querkraftkurve erscheinen daher verdoppelt und müssen halbirt oder im Massstabe 1 *mm* = $^1/_2$ *t* abgegeben werden.

Ferner tragen wir im Kräftepolygon, symmetrisch zum Horizontalstrahl, das Eigengewicht eines Faches (4 . 1,1 = 4,4 *t*) elf-

mal auf und zeichnen dazu in der Figur 1 unterhalb des Fachwerkgerippes das Seilpolygon des Eigengewichts.

Nach diesen Vorbereitungen wird für die Felder 8 9, 9 10 und 10 11 je die Lage der ausserhalb wirkenden Kraft für diejenige Belastung bestimmt, welche unter Berücksichtigung des Eigengewichtes in der Diagonalen die Spannung null hervorruft. Da der Drehpunkt für das Feld 8 9 übers Blatt hinausfällt, erklären wir die Construction für das Feld 9 10, das 10. von links an gerechnet.

Die zufällige Belastung, welche obiger Forderung entspricht, reicht vom rechtsseitigen Auflager aus bis zum Pfosten 10, vielleicht auch etwas darüber hinaus. Wir sehen jedoch vorerst hiervon ab und nehmen an, dass die ungünstigste Stellung der Lasten eintrete, wenn das erste Rad am 10. Pfosten steht. Dann stellt (Fig. 3) die Ordinate Q_9 des Punktes 10 das Maximum der von der Verkehrslast herrührenden Querkraft dar.

Nun hat aber das Fachwerk zugleich sein eigenes Gewicht zu tragen, und bei der Formgebung ist die Gesamtwirkung beider Belastungen massgebend. Um dieser Bedingung zu entsprechen, verlängern wir in der Figur 1 die Seite 9 10 des Eigengewichtspolygons bis zu den Auflagerlinien, wo zwei Strecken AA' und BB' abgeschnitten werden, fügen an letztere die in der Figur 3 für das zehnte Fach bestimmte Kraft Q_9 gleich $B'B''$ an und ziehen $A'B''$. Dann ist der Punkt D, in welchem diese Linie die Abscisse trifft, der Drehpunkt der Strebe 9 10.

Wir denken uns hierbei das Eigengewicht durch den Schnitt CC in zwei Teile zerlegt und bestimmen für jeden derselben die ausserhalb des Schnittes wirkende Kraft. Für den linken Teil fällt die Querkraft nach B und ihre Grösse wird (vgl. die Betrachtungen auf der Seite 21) von der Seilpolygonseite 9 10 auf der linken Auflagerlinie abgeschnitten. Die Querkraft für den rechts vom Schnitt liegenden Teil liegt in A und ihre Grösse wird von der Seite 9 10 unter B abgeschnitten. Um nun die zwei Querkräfte des Eigengewichtes und die in A wirkende Kraft Q_9 zusammenzusetzen, vertauscht man sie nach bekannter Regel in ihrer Lage, das heisst man trägt AA' unter A, $BB' + Q_9$ unter B auf und verbindet die Endpunkte beider Kräfte durch gerade Linien; dann bestimmt deren Schnittpunkt D_9 die Lage der Gesamtquerkraft.

In gleicher Weise werden die Drehpunkte D_8 und D_{10} für das 9. und 11. Feld bestimmt. Nachdem dies geschehen ist, können die oberen Gurtstäbe 8 9, 9 10, 10 11 und 11 B, einer nach dem andern gezogen werden. Ein Versuch, die Lage des Drehpunktes für das 8. Fach zu ermitteln, zeigt sofort, dass dieser auf die linke Seite der Oeffnung fiele; der obere Streckbaum hat somit bis zum Pfosten 8 wagrecht zu verlaufen.

Der Punkt D_8 fiel bei unserer Zeichnung über den Blattrand hinaus; wir mussten uns daher einer Hilfsconstruction bedienen*).

Wir setzten bei dieser Arbeit zunächst voraus, dass das erste Rad des Zuges nirgends in das Fach hineinzutreten habe. Nachträglich haben wir diese Frage noch zu prüfen. Wir zeichnen zu diesem Zwecke in der Figur 3 nach Anleitung der Textfigur 17 drei kleine secundäre Polygone ein. Die bezügliche Polweite f' findet man beispielsweise für das Fach 9 10, indem man (Fig. 1) die Fachlänge lotrecht aufträgt und vom Drehpunkte D_9 aus auf die linke Auflagerverticale projicirt. Man erhält dabei die Strecke f'_9; die Hälfte davon bildet im Kräftepolygon (Fig. 2, Punkt 9) den Pol für das kleine, voll ausgezogene Seilpolygon, welches in der Figur 3 vom Punkte 10 ausgeht. Man überzeugt sich bald, dass die Kraft Q_9 durch das Hineinschieben des ersten Rades kleiner wird. Sollte jedoch ein Vorschieben nötig sein (wie es beim 11. Fache der Fall ist), so überträgt man jetzt die vergrösserte Kraft Q nach der Figur 1 und berichtigt hierdurch die Lage von D.

b) Gurtungskräfte.

Um die Streckbaumkräfte zu bestimmen, zeichnen wir ganz so wie auf der Tafel 1 die Kurven der Minimal- und Maximalmomente (Fig. 4) und zwar doppelt, um jede Gurtung einzeln behandeln zu können. Die Kurve der Minimalmomente zeichnen wir am besten als Seilpolygon mit Hülfe des Kräftepolygons der Figur 2, in welcher die 11 Eigengewichtslasten bereits aufgetragen sind.

---

*) Hier, sowie bei manchen anderen Gelegenheiten, wo durch einen gegebenen Punkt eine Linie nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier Geraden zu ziehen ist, bietet das folgende Verfahren Vorteile:

Soll E mit dem Schnitt der beiden Linien g und g' verbunden werden, so ziehe man $EA'A$ senkrecht auf g und $EC'C$ senkrecht auf g'; dann steht die gesuchte Verbindungslinie senkrecht auf CA'; denn die Höhenlote eines Dreiecks (hier CDE) schneiden sich bekanntlich stets in demselben Punkte.

Um sodann die Momente der zufälligen Last mit Hülfe eines Seilpolygons durch Verschieben der Schlusslinie ermitteln zu können, müssen wir zunächst das Kräftepolygon durch Hinzufügen eines zweiten Bahnzuges, und dem entsprechend auch das Seilpolygon (Figur 3) ergänzen. Im Uebrigen ist hierüber nichts neues zu bemerken. Die sechs Schlusslinien, welche die sechs Maximalmomente liefern, sind ausgezogen und die Punkte, in welchen die sechs Maximalordinaten endigen, mit 6 bis 11 bezeichnet worden.

Die in den Gurtungen wirkenden Kräfte bestimmen wir nach dem *Ritter'*schen Momenten-Verfahren (Nr. 6). Wir multipliciren, um eine einzelne Kraft zu bekommen, die Momentenordinate des betreffenden Drehpunktes mit H und dividiren das Produkt durch den Hebelarm der gesuchten Kraft hinsichtlich des Drehpunktes. Um Platz zu sparen, wählen wir jedoch an Stelle von H blos den vierten Teil davon, also 6 *m*; demzufolge erhalten wir die Gurtungskräfte im Massstabe $1\,mm = 4\,t$.

Die Multiplication und Division wurde in der Figur 4 graphisch vorgenommen. Wir greifen den betreffenden Hebelarm in der Figur 1 mit dem Zirkel ab und tragen ihn in der Figur 4 nebst der constanten Länge von 6 *m* vom Ordinatenfusspunkt aus in beliebiger Richtung (am besten wagrecht) auf; dann führen zwei parallele Linien zum Ziele. Für den untern Stab 9 10 und den obern 10 11 sind die notwendigen Hülfslinien angedeutet; die beiden Hebelarme sind mit u und o bezeichnet.

Schliesslich zeichnen wir noch wie auf der Tafel 1 vier Staffellinien, welche die Veränderlichkeit der Gurtungskräfte deutlicher erkennen lassen. Der Flächeninhalt der unteren Staffellinie gibt auch hier den Materialbedarf für den unteren Streckbaum an; für den oberen ist dies nur angenähert der Fall, weil die Horizontalstrecken hier nicht alle mit den Stablängen übereinstimmen.

In der Figur 1 sind die Ergebnisse dieser Arbeit überdies in Zahlen angeschrieben.

c) Streben.

Bei den Streben ermitteln wir zunächst den Einfluss des Eigengewichtes, und zwar vermittelst des durch die Figur 5 dargestellten *Cremona'*schen Kräfteplanes. Der Verlauf dieser Ar-

beit ist der nämliche wie auf der Tafel 2, sodass Erläuterungen erspart werden können; nur das eine sei erwähnt, dass auch hier durchgehends die nach rechts fallenden Diagonalen als wirksam gedacht werden und die Arbeit da endigt, wo diese Diagonalen aufhören, das heisst beim Knotenpunkte 8. Das eigene Gewicht des Fachwerkes haben wir zu $^2/_3$ auf die unteren und zu $^1/_3$ auf die oberen Knotenpunkte verteilt.

Um den Einfluss der Verkehrslasten zu finden, hat man in der Figur 3 für sämtliche zu berechnenden Streben, das heisst für 2 bis 8 die secundären Seilpolygone zu zeichnen und mit dem Zirkel die grössten Ordinatenunterschiede zu suchen. Die Polweiten f' dieser Polygone werden nach Anleitung der Textfigur 17 (S. 25) in der Figur 1 bestimmt und nach dem Kräftepolygon übertragen. Für die Diagonale 3 sind die diesbezüglichen Linien ausgezogen, für alle übrigen wieder ausgelöscht worden. Es ergab sich, dass nirgends ein Rad über den Pfosten hinüber zu schieben ist; die Ordinaten der Querkraftkurve unter den Pfosten stellen somit ohne Weiteres die massgebenden Kräfte dar.

Nun folgt nach früher beschriebenem Vorgange das Zerlegen dieser Kräfte. Man verlängert jede der Diagonalen nach oben bis sie die Auflagerlinie schneidet, und verbindet den Schnittpunkt E mit dem Drehpunkte D. Dann zieht man durch die Endpunkte der betreffenden Kraft Parallelen zur Strebe und zur Linie $D\,E$. Wo die Punkte D und E unzugänglich werden, macht man von einer Hülfsconstruction Gebrauch, oder man zerlegt die Kraft vollständig in ihre drei Seitenkräfte.

Hierdurch erhält man für sämtliche Streben die grösste von der zufälligen Last herrührende Spannung; man greift sie in dem links gezeichneten Massstabe ab und fügt den erhaltenen Wert dem vom Eigengewichte (Fig. 5) herkommenden hinzu. Die Summe beider ist in der Figur 1 eingeschrieben.

Dass beim vorliegenden Beispiele die Lastenreihe nirgends in das Fach vorzuschieben ist, während bei dem früher (Nr. 12, Taf. 1) behandelten Parallelträger dieses Vorschieben in den sechs ersten Fächern nötig wurde, hängt mit der gekrümmten Form der oberen Gurtung zusammen und trifft bei *Schwedler*'schen Fachwerken meistens ein. Immerhin kann bei längeren Fächern und wenn das Vorderrad der Lokomotive schwach belastet ist, auch leicht der Fall eintreten, dass das z w e i t e Rad beim Pfosten stehen muss.

Eine Bestimmung der kleinsten Strebenkräfte fällt beim *Schwedler'*schen Fachwerke weg, da der Natur des Trägers nach die kleinste Spannung überall null ist.

d) Pfosten.

Auch für die Pfosten 2 bis 6 haben wir zunächst die Polweiten f' und die kleinen Seilpolygone gezeichnet. Es ergab sich jedoch, dass auch nier ein Vorschieben der Lasten wegfällt. Die Ordinaten der Figur 3, welche zu den Strebenkräften führten, sind daher auch für die Pfosten massgebend.

Um die Pfostenkräfte selbst zu finden, verfahren wir nach der auf der Seite 28 oben gegebenen Regel. Wir verschieben die Querkräfte nach links bis zur benachbarten Pfostenlinie und projiciren sie von dem auf die Abscisse hinuntergeloteten Drehpunkte aus auf die Auflagerlinie. Bei zu entfernt liegendem Drehpunkte bedient man sich einer Hülfsconstruction oder der vollständigen Zerlegung. Die über A abgeschnittenen Kräfte tragen je die Nummer des Pfostens. Zu diesen Kräften ist noch der Einfluss des Eigengewichtes hinzuzufügen.

Unbestimmt bleibt schliesslich noch der erste Pfosten. Dieser nimmt eine Ausnahmsstellung ein. Die in ihm vorhandene Kraft ist ausschliesslich von der Belastung der beiden Nachbarfelder abhängig und stets eine Zugkraft. Sie wird bei Eigengewicht ein Minimum, ein Maximum dagegen, wenn man die schwersten Lasten in der Nähe des Pfostens aufstellt.

In der Figur 6 ist diese Maximalkraft bestimmt worden. Wir bilden aus den Radlasten einer Lokomotive ein Kräftepolygon und zeichnen dazu ein Seilpolygon; in dieses tragen wir zwei Schlusslinien von der Horizontalpojection f ein und ziehen durch den Pol zwei Parallelen dazu. Diese Arbeit wird wiederholt, bis der von den Parallen bestimmte Abschnitt sein Maximum erreicht. Da in diesem Falle stets ein Rad am Pfosten stehen muss, so macht das Probiren wenig Mühe. Als Ergebnis erhalten wir 15,8 t.

Das Eigengewicht ruft in dem Pfosten die Kraft $^2/_3 \,.\, 4 \,.\, 1{,}1 =$ 2,9 t hervor; diese Kraft bildet die kleinste Beanspruchung des Pfostens; durch Addition zu obiger Kraft erhält man die grösste Inanspruchnahme gleich 18,7 t.

Nun haben wir noch die Minimalbeanspruchung, das heisst die grössten Zugkräfte der Pfosten 2 bis 6 beziehungsweise 10 bis 6 zu ermitteln.

Die Pfosten 10 und 9 erfahren bei einer von rechts her vorgeschobenen Belastung ihre kleinste Inanspruchnahme. Wir bestimmen deren Grösse, indem wir in der Figur 3 bei 10 und 9 noch zwei weitere secundäre Seilpolygone einzeichnen und die grössten Ordinatenunterschiede mit dem Zirkel aufsuchen. Die beiden Polygone sind zum Unterschied von den früheren, welche zur Formbestimmung dienten, gestricht ausgezogen. In beiden Fällen ist der Zug vorzurücken, bis das zweite Rad den Nachbarpfosten erreicht. Hierauf werden die Kräfte lotrecht unter den betreffenden Pfosten aufgetragen (Punkte 10′ und 9′) und nach bekannter Regel auf die linke Auflagerlinie projicirt. Das Ergebnis ist in beiden Fällen eine Zugkraft. Wir addiren sie zu der vom Eigengewichte erzeugten Druckkraft und schreiben die Summe in der Figur 1 an.

Für die Pfosten 7 und 6 sodann gilt dasselbe, was bereits beim Parallelträger (Seite 49) gesagt worden ist; ihre kleinste Beanspruchung ist eine Druckkraft und gleich dem Gewichte eines oberen Knotens, somit gleich $^1/_3 \, . \, 4 \, . \, 1{,}1 = 1{,}47 \; t$.

Es bleibt demnach nur noch der Pfosten 8 übrig. Für diesen gilt der gesperrte Satz auf der Seite 35; das heisst der Eisenbahnzug ist von rechts her so weit vorzuschieben, bis in dem links vom Pfosten befindlichen Fache zum zweiten male Spannungswechsel eintritt. Soll nun die Spannung der Strebe 8 7′ null sein, so muss die Kraft, welche ausserhalb des diese Strebe treffenden Schnittes wirkt, unendlich fern sein. Die vom Eigengewichte herrührende Kraft beträgt 6,6 *t*. Wir schieben nun den Bahnzug soweit vor, bis er dieselbe äussere Kraft hervorruft. Zu diesem Zwecke verwenden wir (Fig. 3) das kleine, voll ausgezogene Polygon des betreffenden Faches, indem wir die Stelle suchen, wo die Differenz beider Polygone gleich 6,6 *t* ist. Wir haben diese Stelle durch eine strichpunktirte Verticale hervorgehoben und überdies die dadurch ermittelte Stellung des Zuges in der Figur 1 eingetragen.

5,1 *m* rechts von der gefundenen Stelle weist die Kurve der Scherkräfte ebenfalls die Ordinate 6,6 *t* auf; diese Stelle entspricht dem ersten Strebenwechsel des Faches und hat daher für uns keine Bedeutung. — Würde der zweite Strebenwechsel erst eintreten, nachdem das erste Rad den siebenten Pfosten überschritten hat, so hätte man in das secundäre Polygon von diesem Pfosten

an die Radgewichte zum zweiten male, aber in umgekehrter Richtung einfügen müssen.

Nachdem die Stellung der Lasten gefunden ist, unterliegt die Berechnung der Pfostenkraft keiner Schwierigkeit mehr. Mittelst des Poles 8′ im Kräftepolygon wird vom Punkte 8 der Figur 3 aus das gestricht ausgezogene secundäre Polygon gezeichnet, die auf der strichpunktirten Linie bestimmte Strecke unter dem Pfosten als Kraft 8 8′ aufgetragen und vom hinuntergeloteten Drehpunkte D_{10} (er fällt ausserhalb des Blattrahmens) auf die linke Auflagerverticale projicirt. Der Abschnitt daselbst beträgt 11,3 *t*, und da vom Eigengewicht her ein Druck von 4,8 *t* (Kraft 4 in der Figur 5) vorhanden ist, so ergibt sich der Maximalzug des Pfostens 8 gleich 6,5 *t*.

Die durch die Figuren 4 und 5 erhaltenen Stabkräfte lassen sich etwas rascher finden, wenn man das auf den Seiten 15 bis 17 erläuterte *Zimmermann*'sche Verfahren anwendet.

Die Momentenkurven der Figur 4 werden zu diesem Zwecke mit dem Gerippe des Fachwerkes in einer Figur vereinigt. Dann zieht man durch die Endpunkte der Momentenordinaten Parallelen zu den entsprechenden Gurtungsstäben und erhält hierdurch in jedem Fache zwei der Textfigur 11 entsprechende Vierecke, welchen die grössten und kleinsten Gurtungskräfte ohne weiteres zu entnehmen sind. Da die Momente statt durch *H*, durch die Fachlänge *f* dividirt sein sollten, so wird der Kräftemassstab 6 mal kleiner als in der Figur 2. Ebenso liefert uns diese Construction die vom eigenen Gewichte hervorgerufenen Strebenkräfte. Die Kraft in einer Diagonalen wird direct abgeschnitten; diejenige einer Verticalen erhält man, wenn man von der Verticalprojection der ersteren das Gewicht eines unteren Knotens abzieht. Die entsprechenden Strecken der aus den Maximalmomenten gebildeten Vierecke sind bedeutungslos.

Diese Zeichnung wäre daher im Stande, uns die Figuren 4 und 5 vollständig zu ersetzen. Wir haben indessen letztere Figuren vorgezogen, da der *Zimmermann*'sche Weg, um genaue Werte zu liefern, für die Fachwerksfigur sowohl wie für die Momente einen viel grösseren Massstab verlangt hätte. Ueberdies bietet die Figur 4 den für die spätere Verwendung angenehmen Vorteil, dass die Gurtungskräfte als verticale Ordinaten aufgetragen erscheinen. Aus diesem letzteren Grunde haben wir in der Figur 4 auch die kleinsten Gurtungskräfte bestimmt, obschon diese mit grösserer Genauigkeit aus der Figur 5 hervorgehen und es genügt hätte, sich in der Figur 4 auf die Momente der zufälligen Lasten zu beschränken. —

Soll der Berechnung des *Schwedler*'schen Fachwerkes gleichförmig verteilte Belastung zu Grunde gelegt werden, so gelten die Erörterungen der Seiten 28—31. Zur Bestimmung der Fachwerksform und der Strebenkräfte kann sowohl die Kurve der grössten Querkräfte (Fig. 18) als auch das *Herzog*'sche Verfahren verwendet werden. Bei der Formbestimmung der oberen Gurtung

geht man dabei am besten versuchsweise vor, indem man die Richtung der Gurtstäbe angenähert aufzeichnet und dann verbessert, bis die vorgeschriebene Bedingung erfüllt wird. Ein directer Weg ist zwar möglich aber umständlicher.

18. Angenäherte Berechnung des Schwedler'schen Fachwerkes.

Da die Berechnung des *Schwedler*'schen Fachwerkes, wie wir sie oben erklärt haben, wenn auch nicht schwierig, so doch immerhin umständlich ist, so wird in der Praxis vielfach ein Näherungsweg eingeschlagen. Dieser beruht zunächst auf der Einführnng einer gleichförmig verteilten Verkehrslast und sodann auf der Annahme, dass bei der ungünstigsten Belastung einer Diagonale die auf der einen Seite derselben liegenden Pfosten nur das eigene Gewicht, die auf der anderen Seite befindlichen die volle Last eines ganzen Faches zu tragen hätten.

Diese Annahme wird auch bei der Berechnung der übrigen Fachwerke vielfach gemacht und erfreut sich ihrer Einfachheit wegen grosser Beliebtheit, gibt jedoch selbstverständlich nicht ganz richtige Resultate. Denn wenn die Belastung, wie es bei genauer Rechnung stets sein muss, um eine kleine Strecke in das betreffende Fach hineinreicht, so hat weder der eine Nachbarpfosten die ganze Fachlast, noch der andere blos das eigene Gewicht aufzunehmen. Da indessen die Belastungsverhältnisse durch diese vereinfachende Annahme stets ungünstiger werden, so ist sie zulässig und, wo man nicht volle Schärfe der Berechnung verlangt, empfehlenswert.

Auf Grund dieser Voraussetzung lässt sich die Form des *Schwedler*'schen Fachwerkes sehr rasch auf folgende Weise zeichnen.

Man belastet sämtliche Pfosten erst mit Eigengewicht und hierauf mit der vollen Last und zeichnet (Fig. 32) hierfür zwei Seilpolygone g und q von A nach B. Beide sind bekanntlich Parabeln eingeschrieben. Hierauf verlängert man, um beispielsweise den Drehpunkt des Faches 7 8 zu finden, die Seite 7 8 des ersten Polygons nach links bis A' und diejenige des zweiten nach rechts bis B'. Dann schneidet $A' B'$ auf der Horizontalen den Drehpunkt D ab.

$A A'$ ist nämlich dem rechtsseitigen Stützendrucke proportional, welcher entsteht, wenn man die Knotenpunkte links vom Schnitte mit Eigengewicht belastet, und $B B'$ ist ebenso dem linksseitigen Stützendrucke proportional, welcher sich einstellt, wenn die

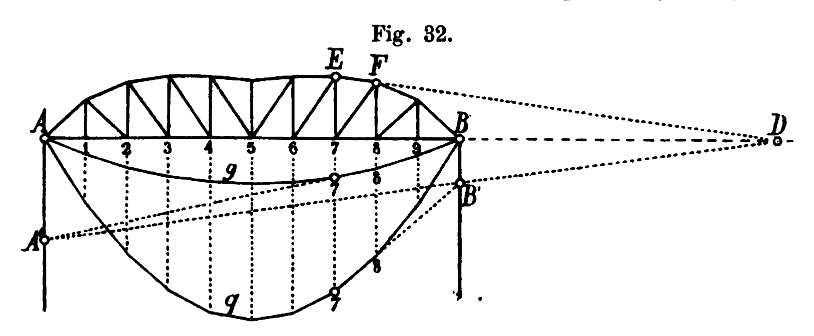
Knoten rechts vom Schnitte die vollständige Last zu tragen haben. Diese beiden Belastungen bilden aber zusammen diejenige, welche die in der Diagonale wirkende Spannung auf null bringen soll; man erhält daher den Drehpunkt der Strebe, wenn man die beiden Stützendrücke nach der bekannten Regel für die Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte vereinigt.

Setzt man diese Arbeit von Fach zu Fach fort, so lässt sich, beim höchsten Pfosten beginnend, der obere Streckbaum Strich für Strich zeichnen.

Die Drehpunkte D fallen bei diesem angenäherten Verfahren stets etwas weiter nach rechts, mit andern Worten, die Pfosten werden um ein geringes höher, als wenn man den genauen Weg einschlägt. Die Minimalspannung einer Diagonale ist infolge dessen nicht mehr genau null.

Ist hiernach die Form des Fachwerkes bestimmt, so ermittelt man vermittelst eines *Cremona'*schen Kräfteplanes (Nr. 3) oder

Fig. 32.



mittelst des *Zimmermann'*schen Verfahrens (Nr. 5) die grössten in den Streckbäumen wirkenden Kräfte. Dieselbe Zeichnung liefert, wenn es gewünscht wird, auch die kleinsten Streckbaumkräfte; man braucht, um sie zu erhalten, nur den Kräftemassstab im Verhältnisse q zu g zu verkleinern.

Aber auch die in den schiefen Streben wirkenden Kräfte können diesem Kräfteplane entnommen werden.

Nennt man nämlich die vom Eigengewichte erzeugte Strebenkraft S_g, die von der vollständigen zufälligen Last erzeugte Kraft S_p und die Summe beider Kräfte, also die Wirkung der ganzen Belastung, S_q, so verhalten sich offenbar $S_g : S_p : S_q = g : p : q$. Bezeichnet man ferner den Einfluss einer blos links von der Strebe aufgebrachten Verkehrslast mit S_l und den Einfluss einer rechtsseitigen

zufälligen Belastung mit S_r, so ergibt sich die kleinste in der Strebe wirkende Kraft für die rechte Fachwerkshälfte

$$S_{min} = S_g + S_r$$

und die grösste Kraft

$$S_{max} = S_g + S_l.$$

Hieraus folgt, da $S_r + S_l = S_p$ ist,

$$S_{min} + S_{max} = 2\,S_g + S_p = \frac{2\,g + p}{q}\,S_q = \frac{g + q}{q}\,S_q.$$

Beim *Schwedler'*schen Fachwerke ist aber S_{min} gleich null. Wir finden somit die grösste in der Diagonalen herrschende Kraft

$$S_{max} = \frac{g + q}{q}\,S_q.$$

Da S_q dem schon gezeichneten Kräfteplane entnommen werden kann, ist die Strebenkraft hiermit bestimmt.

Selbstverständlich gilt dieses Gesetz nur für die Diagonalen der äusseren Teile des Fachwerkes. Für den mittleren Teil mit wagrechtem Obergurt sind die für den Parallelträger abgeleiteten Beziehungen massgebend.

Was sodann die in den Pfosten wirkenden grössten und kleinsten Kräfte betrifft, so gibt es zu deren Bestimmung leider kein so einfaches Verfahren. Kommt es nur auf eine ungefähre Kenntnis der Pfostenkräfte an, so nehme man sie gleich den lotrechten Seitenkräften der für die anschliessenden Streben gefundenen Werte. Man erhält dann für die grösste Druckkraft etwas zu viel, für die grösste Zugkraft etwas zu wenig, wird sich indessen mit diesen Ergebnissen vielfach zufrieden geben können.

Soll grössere Genauigkeit erzielt werden, so muss man den allgemein gültigen Weg einschlagen.

Bestimmt man die Form des *Schwedler'*schen Fachwerkes nach dem oben beschriebenen Verfahren und zwar für die ganze Oeffnung, indem man durchgehends nach links fallende Diagonalen annimmt, so liegen die oberen Knotenpunkte sämtlich auf einer Hyperbel. Geometrisch lässt sich dies wie folgt beweisen,

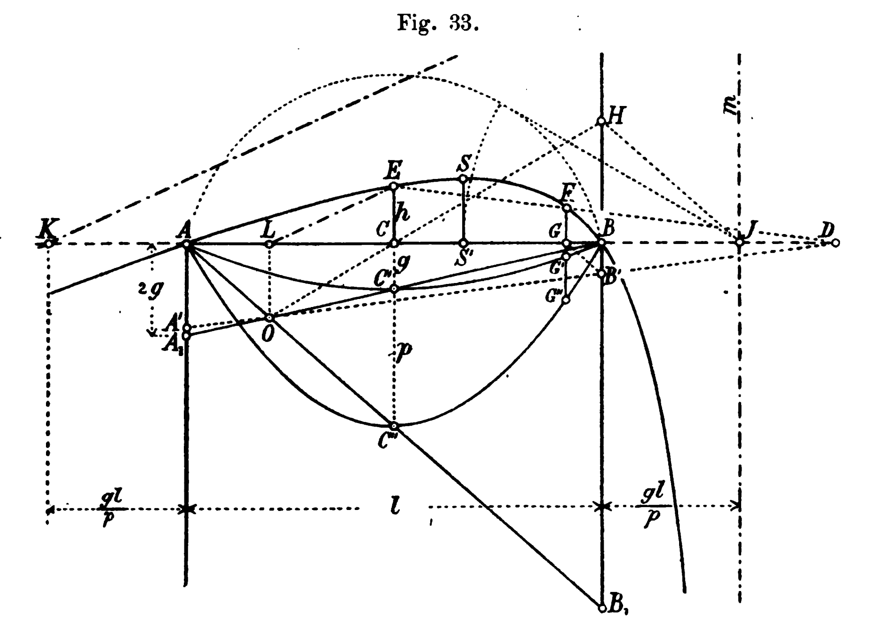
Hält man (Fig. 32) die Verticale durch 7 fest und lässt diejenige durch 8 sich bewegen, so drehen sich die Geraden A' 7 und B' 7 um die Punkte 7 und bilden hierbei, da die Punkte 8 auf entsprechenden Punkten von Parabeln gleiten, projectivische Büschel. Diese Büschel schneiden auf den Auflagerlinien zwei projectivische Punktreihen A' und B' ab. Da aber die unendlich fernen Punkte beider Reihen sich entsprechen, so sind die Reihen zugleich perspectivisch; das heisst die Linie $A'\,B'$ dreht sich um einen festen Punkt.

Zugleich beschreibt hierbei auch der Punkt D eine projectivische Reihe, und da der Knotenpunkt F der Schnitt von $E\,D$ mit der Verticalen 8 ist, so bewegt sich dieser Knotenpunkt auf einem Kegelschnitte.

Die Einzelheiten dieses Kegelschnittes ergeben sich am einfachsten, wenn man (Fig. 33) von dem oberen Endpunkte E des Mittelpfostens ausgeht. Diese Erleichterung ist erlaubt, weil der Kegelschnitt der nämliche sein muss, wo man auch mit seiner Construction beginnen mag.

Um den auf der Verticalen G liegenden Punkt F der Kurve zu finden, hat man nach früher $G'C'A'$ und $C''G''B'$ zu ziehen und A' mit B' zu verbinden. (Die beiden ersten Linien sind in der Figur weggelassen.) $A'\,B'$ schneidet hierbei den Punkt D ab und die Linie $D\,E$ bestimmt den Punkt F. Gelangt G nach A, so fällt A' nach A und B' nach B_1. Versetzt man hierauf G nach B, so gelangt A' nach A_1 und B' nach B. Die Geraden $A\,C''\,B_1$

Fig. 33.



und $A_1\,C'\,B$ bestimmen daher den Mittelpunkt O des Büschels $A'\,B'$. Nach einer bekannten Eigenschaft der Parabel ist ferner $G\,B'$ parallel $A\,B_1$. Dadurch sind die beiden Parabeln entbehrlich geworden; die Bestimmung von F vollzieht sich jetzt durch eine einfache Linienconstruction. Zugleich sieht man, dass die Kurve durch die. Punkte A und B geht.

Zieht man $O\,C\,H$ und macht $H\,J$ parallel zu $A\,B_1$, so geht durch J die lotrechte Asymptote der Hyperbel; denn wenn G nach J versetzt wird, fällt B' nach H und D nach C. Die Verticale durch J schneidet daher die Kurve im Unendlichen.

Die Richtung der zweiten Asymptote wird gefunden, wenn man $O\,L$ lotrecht zieht und L mit E verbindet; denn bringt man D nach L, so fallen

die Punkte A', B' und G und somit auch die Verticale durch G ins Unendliche; EL schneidet also die Kurve im Unendlichen. Macht man endlich AK gleich BJ und zieht durch K eine Parallele zu EL, so ist die zweite Asymptote auch der Lage nach bestimmt.

Bezeichnet man die Strecken CC' und $C'C''$ kurzweg mit g und p, AA_1 daher mit $2g$, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CHJ und COA

$$BJ : BC = LA : LC = OA_1 : OC' = 2g : p$$

und hieraus

$$BJ = AK = \frac{2g}{p} \cdot BC = \frac{gl}{p}.$$

Ferner verhält sich

$$LC : AC = p : 2g + p = p : g + q,$$

wenn $g + p$ durch q ersetzt wird; folglich ist

$$LC = \frac{pl}{2(g+q)}.$$

Wird der Schnittpunkt beider Asymptoten mit M und seine Entfernung von AB mit m bezeichnet, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke JKM und CLE

$$m : l + \frac{2gl}{p} = h : LC,$$

woraus sich

$$m = 2\left(\frac{g+q}{p}\right)^2 h$$

ergibt.

Wählt man A als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so lauten die Gleichungen der beiden Asymptoten $x = l + \frac{gl}{p} = \frac{ql}{p}$ und $y = \frac{(px+gl)\,m}{(g+q)\,l} = \frac{2\,(px+gl)\,(g+q)\,h}{p^2 l}$. Die Asymptotengleichung der Hyperbel ist demnach

$$(px - ql)\left\{p^2 l y - 2\,(px + gl)\,(g+q)\,h\right\} = c.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, ist die Constante $c = 2\,g\,q\,(g+q)\,l^2 h$, somit die Hyperbelgleichung

$$y = \frac{2\,(g+q)\,x\,(l-x)}{l\,(ql - px)}\,h.$$

Der höchste Punkt S der Hyperbel wird geometrisch dadurch gefunden, dass man über AB einen Kreisbogen zeichnet, aus J die Tangente daran legt und deren Länge herunterschlägt. Denn die Punkte A, B und die beiden unendlich fernen Punkte der Kurve bilden eine Involution, in welcher S der Doppelpunkt ist. Projicirt man diese Punkte auf die Linie AB, so wird J der Mittelpunkt und S' der Doppelpunkt der involutorischen Reihe. (S' ist der nämliche Punkt, in welchem die Kurve der grössten Scherkräfte für gleichförmig verteilte Belastung die Abscisse schneidet. Vergl. Fig. 155, Seite 364 von *Culmanns* Graphischer Statik.)

Rechnerisch ergeben sich die Coordinaten von S

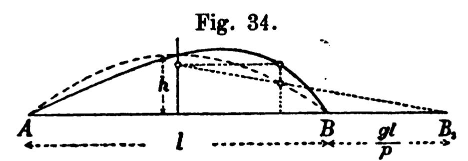
$$x_s = \frac{(q - \sqrt{g\,q})\,l}{p}$$

$$y_s = \frac{2\,(g+q)\,(g+q-2\sqrt{g\,q})\,h}{p^2}.$$

Mit Hülfe der Asymptoten lässt sich die Hyperbel leicht Punkt für Punkt zeichnen. Doch braucht man dazu ziemlich viel Raum. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, empfiehlt sich das folgende, von Prof Dr. *Schäffer* angegebene Verfahren: Man zeichnet (Fig. 34) über $A\ B$ eine Parabel mit der Höhe h, schneidet sie durch eine Reihe von Verticalen, projicirt die Schnittpunkte von B_1 aus auf die Mittellinie und von hier aus horizontal auf die Verticalen, so erhält man auf diese Weise beliebig viele Kurvenpunkte.

Die Gleichung der Hyperbel zeigt, dass es stets unendlich viele, einander affin verwandte Fachwerke gibt, die einem gegebenen Belastungsverhältnisse $g : p$ entsprechen. In der Praxis ist nun stets die grösste Höhe des Fachwerkes vorgeschrieben. Mit der Höhe des Scheitels S stimmt diese Grösse nur dann überein, wenn zufällig ein Pfosten mit der Scheitelordinate sich deckt. Man trägt daher zuerst denjenigen Pfosten auf, welcher dem Scheitel S am nächsten steht, macht ihn gleich der gegebenen Höhe und bestimmt dann rückwärts die entsprechende Parabel.

Fig. 34.



Uebrigens verursacht das durch die Figur 32 angegebene Verfahren kaum mehr Arbeit und besitzt ausserdem den Vorteil, dass es die Drehpunkte der verschiedenen Fächer liefert, welche später doch gebraucht werden. —

Das einer Hyperbel angepasste Fachwerk besitzt noch die weitere interessante Eigenschaft, dass die Kraft in einer Diagonale sowohl bei der vollständigen als bei der ungünstigsten Belastung der Länge der Diagonale proportional ist.

Belastet man das Fachwerk vollständig, so ist das Moment der Querkraft für einen Schnitt im Abstande x von A bekanntlich

$$M = \frac{q\,x\,(l-x)}{2}.$$

Dividirt man diesen Wert durch die Ordinate y, so bekommt man

$$\frac{M}{y} = \frac{q\,(q\,l - p\,x)\,l}{4\,(g+q)\,h}.$$

Für einen Querschnitt im Abstande $x + f$ wird dieser Ausdruck

$$\frac{M'}{y'} = \frac{q\,(q\,l - p\,x - p\,f)\,l}{4\,(g+q)\,h}.$$

Nach der auf der Seite 19 stehenden Formel wird nun die Strebenkraft für vollständige Belastung

$$S_q = \frac{s}{f}\left(\frac{M}{y} - \frac{M'}{y'}\right) = \frac{q\,p\,l}{4\,(g+q)\,h}\,s.$$

Die Strebenkraft S_q für vollständige Belastung ist also in der That der Strebenlänge proportional.

Nun ist aber die grösste in der Strebe vorkommende Kraft nach Seite 79 $S_{max} = \frac{g + q}{q} S_q$. Wir finden daher

$$S_{max} = \frac{pl}{4h} s.$$

Man beachte, dass der Faktor von s beim Schwedlerträger gerade doppelt so gross ist als beim Parabelträger. (S. 58).

19. Das Pauli'sche Fachwerk.

Die Beweggründe, welche den Oberbaurat *von Pauli* zur Aufstellung der nach ihm benannten Fachwerksform geführt haben, sind kurz die folgenden.

Herr *v. Pauli* war zur Zeit, als er seine Brücken entwarf, von der Annahme beherrscht, es seien an der Zerstörung der Brücken (namentlich der eisernen Brücken) vorzugsweise die Erschütterungen schuld, welche die darüber fahrenden Züge verursachen. Diese Erschütterungen, die nicht allein den Oberbau, sondern nach und nach auch die Widerlager gefährden, glaubte *v. Pauli* wenn nicht ganz aufzuheben, so doch bedeutend zu vermindern, wenn er seine Träger in der neutralen Axe aufhieng und diese Axe geradlinig bildete.

Ein Eisenbahnzug, der über ein Fachwerk mit parallelen Streckbäumen fährt, wird den Zugbaum ausdehnen und diese Dehnung wird mehr oder weniger stossweise vor sich gehen. Sie ist auch nicht unbedeutend. Wird das Eisen unter der zufälligen Last mit 0,5 t pro cm^2 belastet, so beträgt die Ausdehnung bei einer Brücke von 52 m Spannweite 13 mm; um ebenso viel muss der untere Streckbaum an dem einen Ende über das Widerlager gleiten. Bei einem gewöhnlichen parabolischen Träger mit gerader unterer Gurtung geht zwar die neutrale Axe durch die Stützpunkte, weil sie sich dort mit den beiden Streckbäumen vereinigt; allein ein Ausweichen der Stützpunkte findet dennoch statt, weil die neutrale Axe nach oben gekrümmt ist und sich bei eintretender Belastung verflacht. Einzig durch die Form des *Pauli*'schen Fachwerkes wird diese horizontale, rüttelnde Bewegung der Auflagerpunkte vermieden. (Einen Parallelträger etwa in den Mittelpunkten seiner Endpfosten aufzulagern, ist praktisch schwer durchführbar.)

Ferner glaubte Herr *v. Pauli,* dass auch der veränderliche Querschnitt der Streckbäume unzweckmässig sei. Denn bei veränderlicher Beanspruchung des Streckbaumes findet stets Materialvergeudung statt, weil man den Querschnitt den Kräften niemals

6*

genau anpassen kann. Auch tritt bei jedem Querschnittswechsel eine Unregelmässigkeit in der Verteilung der Spannungen ein.

Zu Gunsten des *Pauli*'schen Fachwerkes spricht ferner, dass die Füllungsglieder bei vollständiger Belastung sehr wenig zu arbeiten haben und erst bei einseitiger Belastung zu kräftiger Wirkung gelangen; man darf daher erwarten, dass die Füllungsglieder verhältnismässig wenig Material erheischen.

Soll nun der Querschnitt der beiden Streckbäume constant sein, und der Schwerpunkt eines jeden durch das Fachwerk geführten Schnittes mit der Horizontalen durch die Stützpunkte zusammenfallen, so müssen beide Streckbäume gebogen sein und sich an den Auflagern vereinigen.

Kommt dabei für die Streckbäume verschiedenes Material zur Verwendung, so müssen sich die Entfernungen der Querschnittsschwerpunkte von der neutralen Axe zueinander verhalten wie die Quotienten $\frac{\text{specifische Inanspruchnahme}}{\text{Elasticitätsmodul}}$ der beiden Gurtungen. Werden beide Streckbäume aus gleichem Material hergestellt, und wird die Flächeneinheit gleich stark belastet, so müssen die Streckbäume bezüglich der Horizontalen symmetrisch verlaufen.

Unabhängig von diesen, die Fachwerksform betreffenden Erwägungen, schlug Herr *v. Pauli* bei seinen Brücken auch hinsichtlich der Auswahl und Behandlung des Materials, sowie hinsichtlich der Querschnittsberechnung und der Bauart neue Wege ein. Auf diese Eigentümlichkeiten näher einzutreten ist jedoch hier nicht der Ort*).

Ueber die Richtigkeit und Bedeutung der Beweggründe, welche zu der *Pauli*'schen Fachwerksform führten, haben sich die Ansichten im Lauf der Zeit geändert, und die seitdem gemachten Erfahrungen sprechen dafür, dass die Befürchtung, welche *Pauli* hinsichtlich der Erschütterungen und des Querschnittswechsels hegte, vor anderen, schwerer wiegenden Umständen zurücktreten müssen. Namentlich spricht die schwierigere Herstellung zweier gekrümmter

*) Man schlage hierüber die reichhaltige Literatur über Brückenbau nach. Auch enthält die im Jahr 1866 erschienene erste Auflage von *Culmanns* Graphischer Statik nähere Mitteilungen über die *Pauli*'schen Brücken, sowie manche andere darauf bezügliche Aeusserungen des Verfassers, die wir als nicht in dieses Werk passend oder als nicht mehr zeitgemäss hier übergehen.



Streckbäume zu Ungunsten des *Pauli'*schen Fachwerkes. Gegenwärtig dürfte es selten mehr zur Ausführung gelangen.

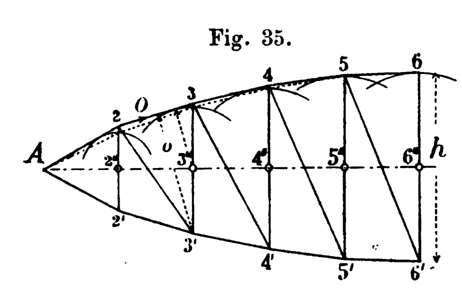
Wir beschränken uns aus diesem Grunde bei der Beschreibung der statischen Berechnung auf das Notwendigste.

Wie die meisten Fachwerke mit gekrümmter Gurtung, so haben auch die *Pauli'*schen lotrechte Druck- und schiefe Zugstreben erhalten, wobei wie beim Parabelträger jedes Fach eine Gegenstrebe besitzt.

Die Form der Gurtung lässt sich auf Grund der Bedingung, dass die Gurtungskraft constant sein soll, folgendermassen bestimmen:

Soll (Figur 35) die Kraft O in allen Stäben des oberen Streckbaums dieselbe sein, so müssen die aus den unteren Knotenpunkten auf die gegenüberliegenden Stäbe gefällten Lote o den auf die Knotenpunkte treffenden Momenten proportional sein. Dasselbe gilt auch von den Loten, welche man von den Mittelpunkten der Pfosten auf die Gurtungsstäbe fällt, denn diese sind (bei symmetrischer Construction) gleich $\frac{1}{2}\,o$. Man trägt daher zunächst die Kurve der Maximalmomente in einem solchen Massstabe auf, dass die mittelste Ordinate gleich der halben Fachwerkshöhe wird, zeichnet dann, die Punkte 2″, 3″ etc. als Mittelpunkte und die Momentenordinaten als Halbmesser benützend, über jedem Pfosten einen Kreisbogen und zieht hierauf, von A ausgehend, ein Polygon, dessen Ecken auf den Verticalen liegen und dessen Seiten die Kreise der Reihe nach berühren.

Fig. 35.



Wir haben dabei, was bei den *Pauli'*schen Fachwerken stets zutrifft, vorausgesetzt, dass bei Totalbelastung die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen in Thätigkeit stehen.

Bestimmt man auf dieselbe Weise die Form des unteren Streckbaumes, wobei für den Stab 3′4′ zum Beispiel das Moment für den Knoten 3 massgebend ist, so gelangt man auf einen Linienzug, der von dem oberen um ein Geringes abweicht. Man ersieht daraus, dass die von *Pauli* aufgestellte Bedingung nicht mathematisch genau erfüllt werden kann, was übrigens schon daraus hervorgeht, dass bei symmetrischer Fachwerksform die Kräfte in zwei übereinander liegenden Streckbaumgliedern nur dann gleich gross sind, wenn

die zwischenliegende Diagonale spannungslos ist; letzteres trifft aber bei der *Pauli*'schen Form nicht vollkommen zu. Man muss diese kleine Abweichung notwendig mit in den Kauf nehmen und sich damit begnügen, die eine der beiden Gurtungen zeichnerisch zu bestimmen und die erhaltene Form auf die andere Seite zu übertragen. Da die Kräfte des oberen Streckbaums diejenigen des unteren übertreffen, so geht man bei der Formbestimmung am besten von ersterem aus.

Hat man einmal die Form der Gurtungen festgelegt, so ist damit auch zugleich die Ermittelung der grössten Gurtungskräfte erledigt; denn diese sind unveränderlich, das heisst sämtlich gleich dem grössten Maximalmomente, dividirt durch die grösste Fachwerkshöhe. Die Kräfte der unteren Gurtung sind zwar etwas geringer; doch wird man sich in der Praxis um diesen kleinen Unterschied nicht kümmern. Die kleinsten Streckbaumkräfte treten bei unbelasteter Brücke ein und sind ebenfalls ganz oder doch nahezu constant.

Was schliesslich die Auffindung der grössten und kleinsten Strebenkräfte angeht, so erteilen die vorhergehenden Nummern, zusammen mit den allgemeinen Betrachtungen des ersten Kapitels alle nötige Auskunft. Rechnet man mit gleichförmiger Verkehrslast, so dienen die Constructionen der Tafel 2 als Vorbild, bei Einzellasten diejenigen der Tafel 3.

Am meisten Mühe bereitet, wenn man genau rechnen will, die Ermittelung der grössten Zugkräfte in den Verticalen; hinsichtlich dieser Aufgabe sind speziell die Entwicklungen der Nummer 10 massgebend; wir haben auch hierüber nichts Neues hinzuzufügen.

20. Dachstühle.

Die im Hochbau üblichen Dachstühle müssen wir zwar im allgemeinen zu den Fachwerken zählen; doch entbehren viele von ihnen der klaren Zusammensetzung und Durchbildung, welche für eine sichere statische Berechnung notwendig oder doch wünschenswert ist. Namentlich treffen wir bei den hölzernen Dachstühlen häufig statisch unbestimmte, zuweilen auch unvollständige Fachwerke oder sonstige Umstände an, die der statischen Berechnung Schwierigkeiten bereiten. Die eisernen Dachstühle dagegen stellen in der Regel, wie die eisernen Brücken, reine Fachwerke dar, ja manche von ihnen sind Muster von Einfachheit und Klarheit.

Als Belastung der Dachstühle haben wir in erster Linie ihr eigenes Gewicht und dasjenige der Dachdeckung, in zweiter das Gewicht des Schnees und den Druck des Windes zu berücksichtigen. Die beiden letzteren Einflüsse bilden die zufällige Last.

Der Druck des Windes stellt, abweichend von den andern Einflüssen, eine schief gerichtete Belastung dar. Ferner trifft der Wind, da er meistens wagrecht oder schwach geneigt gerichtet ist, höchst selten beide Dachflächen. Es genügt daher stets, nur die eine derselben als belastet zu denken.

Nennt man (Fig. 36) den Winkel, welchen die Windrichtung mit der Dachfläche bildet, α, die Länge der letzteren a, die Entfernung zweier Binder b und den Druck des Windes bei senkrechtem Auftreffen, auf die Flächeneinheit bezogen, λ, so ergibt sich

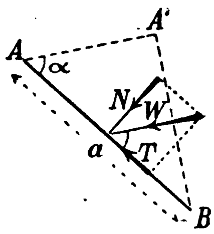
$$W = \lambda \,.\, A'B \,.\, b = \lambda\, a\, b \,.\, \sin \alpha$$

und hieraus der Normaldruck

$$N = \lambda\, a\, b \,.\, \sin^2 \alpha.$$

Die tangentiale Seitenkraft $T = W \,.\, \cos \alpha$ ruft zwar an der Dachfläche Reibung hervor, welche bei rauher Fläche nicht unbedeutend ist. Doch wird diese Kraft in der Praxis stets vernachlässigt.

Fig. 36.



Uebrigens stimmt auch abgesehen hiervon obige Formel bekanntlich nicht ganz mit den Ergebnissen von Versuchen überein; letztere zeigen vielmehr, dass der Winddruck nicht bei normaler, sondern bei etwas von der normalen abweichender Richtung am grössten wird. Doch da das Gesetz, nach welchem sich der Druck mit dem Einfallswinkel ändert, bis jetzt nicht bekannt ist, so wollen wir uns, mit der obigen Formel, welche in der Praxis fast immer benützt wird, begnügen.

In der Regel folgt der obere Streckbaum eines Dachstuhles der Dachfläche, und je nachdem letztere eben oder gekrümmt ist, erhalten wir verschiedene Formen des Stuhles. Wenn die Dachfläche nicht eben oder cylindrisch, sondern pyramidal, kegel- oder kugelförmig gekrümmt ist, so gehört der Dachstuhl streng genommen zu den räumlichen Fachwerken; doch lassen sich manche der hieher gehörenden Formen auch als ebene behandeln.

Weitaus am häufigsten kommen die ebenen Satteldachstühle vor, deren obere Gurtung aus zwei geradlinigen, mehr oder weniger geneigten Stäben, den Sparren besteht. Wir wollen zu-

nächst diesen unsre Aufmerksamkeit widmen und dabei mit den zwei für eiserne Constructionen brauchbarsten Formen, dem englischen und dem französischen Dachstuhl, beginnen.

21. Der englische Dachstuhl.

(Tafel 4_{1-4}.)

Kein anderer Dachstuhl bildet ein so reines und so einfaches Fachwerk wie der englische. Er besteht (Tafel 4_1) aus geradlinigen Streckbäumen und einer Schar von regelmässig aufeinander folgenden Füllungsgliedern. Ohne Aenderung des Gesetzes kann er für jede Spannweite verwendet werden.

Ueber die ungünstigste Belastungsart der beiden Streckbäume haben wir, abgesehen vom Winddrucke, dem in der Nummer 8 (Seite 22) Gesagten nichts beizufügen. Jede verticale Last beansprucht die Streckbäume im gleichen Sinne, den unteren auf Zug, den oberen auf Druck; das Eigengewicht des Bauwerkes zusammen mit der Schneelast bildet somit die gefährlichste Belastung.

Was sodann die Streben betrifft, so fallen ihre Drehpunkte stets mit einem der Auflager zusammen. Es üben somit diejenigen Lasten, welche zwischen einer Strebe und dem entfernteren Auflager aufgelegt werden, gar keinen Einfluss auf die Strebe aus. Schneidet man (Tafel 4_1) das Fachwerk bei der Strebe 4 5 quer durch, so ist es für diese ganz gleichgültig, wie die rechts davon liegenden Knotenpunkte belastet sind; denn für die rechtsseitigen Lasten fällt die links vom Schnitte wirkende Kraft in die Auflagerlinie, und da sich die Streckbäume auf dieser Linie schneiden, so zerlegt sich die Kraft nach der Richtung der Streckbäume, ohne die in der Strebe wirkende Kraft zu beeinflussen. Die Strebenkraft ist daher nur von der Belastung der Knoten 2 und 4 abhängig, und zwar ist sie um so grösser, je stärker diese Punkte belastet werden.

Wo nun die Verhältnisse so liegen, dass einseitige und ganze Belastung den nämlichen Einfluss ausüben, da denken wir uns, um die Maximalkräfte zu finden, am einfachsten die ganze Spannweite mit Lasten bedeckt. Man kann daher sagen:

Sämtliche Stäbe des englischen Dachstuhles sind bei vollständiger Belastung am stärksten in Anspruch genommen.

Belastet man sämtliche Knotenpunkte des Dachstuhles und führt hierauf wie oben durch die Strebe 4 5 einen Schnitt, so fällt die ausserhalb dieses Schnittes wirkende Kraft nach der Theorie des einfachen Balkens nach links und ist aufwärts gerichtet; ihr Moment bezüglich des Drehpunktes 1 ist positiv, somit die Strebenkraft eine Druckkraft. Für die Verticale 5 6 ergibt sich nach derselben Betrachtung eine Zugkraft. Allgemein gilt daher der Satz: Beim englischen Dachstuhl sind die nach der Mitte zu fallenden Streben gepresst, die steigenden gezogen.

Man vergleiche hiermit den auf der Seite 43 stehenden Satz und beachte, dass der Parallelträger sich gerade umgekehrt verhält.

Die Bestimmung der am englischen Dachstuhl wirkenden Kräfte ist nun sehr einfach, weil, abgesehen vom Winddruck, ein und dieselbe Belastung das Maximum aller inneren Kräfte gibt. Die Aufgabe beschränkt sich nämlich auf die Zeichnung eines *Cremona'*-schen Kräfteplanes. Die betreffende Figur (Tafel 4_2) ist für eine Spannweite von 30 *m* und eine Belastung der oberen Knotenpunkte von je 3 *t* durchgeführt worden. Das Eigengewicht der unteren Knoten ist so geringfügig, dass man es ohne Anstand auf die oberen übertragen darf. Der Massstab ist 1 *mm* = $^1/_2$ *t*. In Anbetracht der Symmetrie kann die Zeichnung auf die Hälfte beschränkt werden.

Zur Erläuterung werden folgende kurze Bemerkungen genügen.

Zunächst wird der Auflagerdruck bestimmt; er ergibt sich, wenn man die auf den Knoten 1 fallende Last abzieht, gleich $3^1/_2$ Knotenlasten, also gleich 10,5 *t*. Diese Kraft trägt man vertical auf und fügt ihr in entgegengesetzter Richtung die drei Lasten 2, 4 und 6 an. Dann beginnt man im Knoten 1 mit der Zerlegung des Auflagerdruckes nach 1 2 und 1 3, geht dann nach 2 über, wo 1 2 mit der Last 2 zusammengesetzt und deren Mittelkraft nach 2 3 und 2 4 zerlegt wird, hierauf nach 3, für welchen Punkt die vier Kräfte 1 3, 2 3, 3 4 und 3 5 ein geschlossenes Polygon bilden müssen u. s. f. Um schliesslich die im mittelsten Hängeisen 7 8 wirkende Kraft zu finden, stelle man zwischen den am Knoten 8 angreifenden Kräften, von denen der Symmetrie wegen drei bekannt sind, Gleichgewicht her; man gelangt dabei auf die Kraft 7 8 in der Figur 2.

Die Strebenkräfte sind durch die gleichen Ziffern wie in der Figur 1 bezeichnet; die Streckbaumkräfte sind alle von der Kräfteverticalen aus zu messen und tragen an ihrem andern Endpunkte die Nummer ihres Drehpunktes.

In der Figur 1 haben sämtliche Druckstäbe der besseren Uebersicht wegen einen Doppelstrich erhalten.

Da die Dreiecke 1 2 3 in der Figur 1 und 2 3 6 in der Figur 2 ähnlich sind, so ist in letzterer 2 4 gleich 4 6. Da ferner auch Aehnlichkeit zwischen den Dreiecken 3 4 5 (Figur 1) und 4 5 6 (Figur 2) besteht, so stehen die Strecken 2 3 und 4 5 in beiden Figuren im gleichen Verhältnisse. Daraus folgt, freilich nur bei gleich langen Fächern: Die in einer Diagonale wirkende Kraft ist der Länge derselben proportional. Ausserdem: Die in einer Verticalen wirkende Kraft ist (mit Ausnahme der mittelsten) der Länge der nächst kleineren Verticalen proportional. Der Faktor, mit dem die Strebenlängen multiplicirt werden müssen, ist, wie man leicht findet, gleich $\frac{q\,l}{4\,h}$, wenn l die Spannweite, h die Länge des mittleren Hängeisens und q die auf die Längeneinheit bezogene Belastung bedeutet.

Mit Vorteil lässt sich bei der Berechnung des englischen Dachstuhles das *Zimmermann*'sche Verfahren (Seite 15) anwenden. Man trägt zu diesem Zwecke wie vorhin die verticalen äusseren Kräfte auf (Figur 2) und zeichnet mit einem auf der Linie 8 2 gelegenen Pole O das gestrichte Momentenpolygon der Figur 1. Dann werden, wie es für das Fach 3 5 gezeigt ist, die Kräfte durch Parallellinien leicht gefunden. Die Poldistanz von O nimmt man gleich einem Vielfachen der Fachlänge (in unserer Zeichnung $2\,f$); dann sind die gefundenen Kräfte in entsprechend kleinerem Massstabe ($1\ mm = 1\ t$) abzugreifen.

Im Bisherigen haben wir der Einfachheit wegen den Einfluss des Windes ausser Acht gelassen. Es dürfte sich überhaupt stets empfehlen, den Winddruck, da er schief gerichtet ist, getrennt zu behandeln.

Wie in der Nummer 2 (Seite 3) gezeigt worden ist, kann ein Fachwerk beliebig gerichteten Kräften widerstehen, sobald drei seiner Knotenpunkte auf festen Auflagerbahnen gleiten und die drei Auflagernormalen nicht durch einen und denselben Punkt gehen. Von den drei Auflagerbahnen werden, wie wir dort ebenfalls schon bemerkt haben, in der Praxis stets zwei vereinigt, so dass das Fachwerk ein festes und ein Gleitauflager erhält. Auf diesen Umstand müssen wir hier zum ersten male Rücksicht nehmen; denn während es bei ausschliesslich verticaler Belastung gleichgültig ist, welches der beiden Auflager fest und welches beweglich ist, ergeben sich bei schief gerichteten Belastungen verschiedene innere Kräfte, je nachdem man das linke oder das rechte Auflager als beweglich annimmt.

Wir wollen in unserem Beispiele voraussetzen, das linke Auflager sei mit einem Rollenschuh versehen, das rechte sei fest.

Was die Grösse des Winddruckes betrifft, so haben wir (Textfigur 36) a gleich $16{,}16\ m$ zu setzen; die Binderweite b sei gleich $4{,}0\ m$ und der Druck pro Quadratmeter λ gleich $0{,}2\ t$. Der Winkel

α wird, wenn die Windrichtung um 15° geneigt ist, gleich $36\frac{3}{4}^\circ$. Dann ergibt sich der Normaldruck auf den ganzen Sparren (s. S. 87) gleich 4,63 *t*. Bei von rechts wehendem Winde geht der Gesamtdruck offenbar durch den Knoten 4'; wir bringen ihn mit der linken Auflagerverticalen in *A'* (ganz unten links) zum Schnitt und zerlegen ihn (Figur 3) nach den Richtungen *A' A* und *A' B*. Damit sind die beiden Auflagerdrücke bestimmt und nun wird wiederum ein *Cremona*'scher Plan gezeichnet. Man beginnt mit dem Knoten 1, überspringt die Knoten 2 bis 6, da die Streben der linken Fachwerkshälfte spannungslos sind, stellt hierauf in 8, dann in 7 Gleichgewicht her und setzt diese Arbeit bis zum Punkt 2' fort. Für 1' muss sich wie immer für den letzten Knoten von selbst ein geschlossenes Polygon ergeben, was als Probe dient.

In der Figur 4 sind sodann in derselben Weise die Spannungen bestimmt worden, welche sich einstellen, wenn die linke Dachseite vom Winde getroffen wird. Die Auflagerdrücke werden gefunden, wenn man den durch den Knoten 4 gehenden Gesamtdruck in eine lotrechte Seitenkraft durch *A* und eine schiefe durch *B* zerlegt. Hier werden die Strebenkräfte auf der rechten Hälfte gleich null. Im Uebrigen braucht die Figur keiner Erklärung.

Untersucht man die gefundenen Kräfte hinsichtlich ihres Sinnes, so erkennt man, dass sie sämtlich im gleichen Sinne wie die früher gefundenen wirken. Der Winddruck erhöht somit die vom Eigengewicht und von der Schneelast herrührenden Kräfte durchgehends.

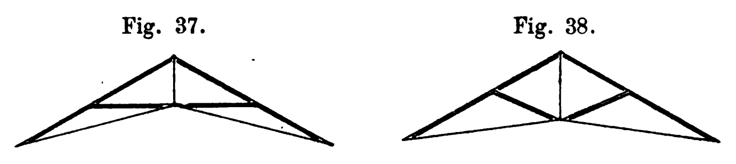
In der Figur 1 sind die Ergebnisse für Totalbelastung und für rechtsseitigen Winddruck, letztere in Klammern, eingeschrieben; der von links wehende Wind hat im Ganzen etwas geringeren Einfluss.

Die grösste Inanspruchnahme der einzelnen Stäbe erhält man nun, wenn man den Einfluss des Windes zu demjenigen der lotrechten Belastung hinzufügt; dabei ist von den Ergebnissen der Figuren 3 und 4 je das grössere zu nehmen. Die kleinste Inanspruchnahme entsteht, wenn der Dachstuhl blos sein eigenes Gewicht trägt; sie wird durch proportionale Verringerung der Kräfte der Figur 2 gefunden.

Besitzt der Dachstuhl kein Gleitauflager, sondern ist er an beiden Endpunkten fest aufgelagert, so ist das Fachwerk nicht mehr statisch bestimmt und die Ermittlung der inneren Kräfte muss nach den im vierten Kapitel entwickelten Regeln (vgl. Nr. 34) oder nach der Theorie des elastischen Bogens durchgeführt werden. —

Die beiden in den untenstehenden Figuren dargestellten, zuweilen mit dem Namen „deutscher Dachstuhl" belegten Formen sind einfach Abarten des englischen Stuhles. Ihre Kräftepläne gestalten sich so einfach, dass eine nähere Beschreibung überflüssig ist*). Bei beiden werden häufig die gezogenen Teile aus Eisen, die gedrückten aus Holz ausgeführt.

Fig. 37. Fig. 38.



22. Der französische Dachstuhl.

(Tafel 4_{5-8}.)

Bei dem französischen Dachstuhl (Tafel 4_5) kann man sich jede Hälfte als aus einem armirten Balken (1 8 und 8 1') gebildet denken; der Horizontalschub beider Balken wird durch das Zugband 5 5' aufgehoben, welches mit den Bändern 5 8 und 8 5' das diesen Dachstuhl charakterisirende Mitteldreieck bildet. Bei kleinen Spannweiten beschränkt man sich darauf, jeden der beiden Sparren durch einen Pfosten zu unterstützen (Textfig. 39); wird dagegen die Spannweite grösser, so werden statt eines Pfostens je zwei wie beim belgischen Dachstuhl (Textfig. 40) oder drei (Tafel 4_5) eingestellt, wobei im letzteren Falle neue Zugbänder nötig werden. Leicht könnte man noch weiter gehen und zu den drei Pfosten vier weitere, in den ungeraden Achteln sitzende hinzufügen.

Die in dem Dachstuhl der Figur 5 auftretenden Spannungen sind durch die Figuren 6 bis 8 bestimmt worden; die erstere zeigt den Einfluss der lotrechten Belastung, die beiden letzteren die Folgen des Winddruckes.

Die lotrechte Belastung des Stuhles betrage wiederum 3 t auf den Knotenpunkt, so dass sich der Auflagerdruck A auch hier gleich $3^1/_2 \cdot 3 = 10{,}5\ t$ ergibt. Diese Kraft wird (Fig. 6) zusammen mit den drei Knotenlasten 2, 4 und 6 aufgetragen und zunächst parallel zu 1 2 und 1 3 zerlegt. Der Endpunkt der

*) Vergleiche übrigens die erste Auflage von *Culmanns* Graph. Statik, Seite 420.

hierdurch bestimmten Stabkräfte trägt die Ziffer 1. Hierauf geht man zum Knotenpunkte 2 über und stellt Gleichgewicht her zwischen der Last 2 und den Stabkräften 2 1, 2 3 und 2 4; die Kraft im Stabe 2 3 trägt im Plane die Ziffern 1 und 4. Nun wird der Knotenpunkt 3 ins Auge gefasst. Hier treffen sich vier Stabkräfte 3 1, 3 2, 3 4 und 3 5. Da die zwei ersteren bekannt sind, so lasssen sich die beiden letzteren durch zwei parallele Linien leicht finden; die eine ist durch die Ziffern 3 und 4 begrenzt, die andere fällt in die Richtungslinie der Stabkraft 1 3 und reicht von 3 bis 8.

Jetzt stösst man nach dem gewöhnlichen *Cremona*'schen Vorgange auf ein Hindernis: Sowohl im Knotenpunkte 4 als auch im Punkte 5 findet man d r e i neue Stabkräfte, so dass die übliche Zerlegung nicht möglich wird. Dies rührt daher, dass der mehrfache französische Dachstuhl zu den unregelmässigen Fachwerken gehört, in denen sich nicht einfach Dreieck an Dreieck reiht oder, wie man auch sagen kann, die Füllungsglieder nicht einen fortlaufenden Linienzug bilden. (Vgl. S. 7). Nichtsdestoweniger ist das Fachwerk statisch bestimmt; denn die Zahl der Knoten ist $k = 15$, die Zahl der Stäbe $s = 27$, folglich $2\,k - s = 3$. Die kleine Schwierigkeit lässt sich auf folgende Weise überwinden.

Man zerlegt zuerst die Last 6 parallel zum Sparren und zum Pföstchen 6 7; dadurch erhält man die im letzteren wirkende Kraft. Sodann zerlegt man diese Kraft in zwei Seitenkräfte parallel zu 7 4 und zu 7 8, wodurch man die Stabkraft 7 4 erhält; und nun lässt sich mit Hülfe dieses Wertes das Gleichgewicht um den Knotenpunkt 4 herstellen.

Diese Nebenarbeit muss im allgemeinen in einer besonderen Figur vorgenommen werden; doch lässt sich diese umgehen, wenn, wie in unserem Beispiele, die Sparrenlängen und die Lasten gleich gross sind.

Die neuen Stabkräfte 4 5 und 4 7 tragen im Kräfteplan die Endziffern 3 7 und 4 7; die Kraft 4 6 ist in ihrer Mitte entsprechend bezeichnet. Wie man sich leicht überzeugt, bilden diese drei Kräfte zusammen mit den schon früher bekannten (4 2 und 4 3) und der Last 4 ein geschlossenes Polygon.

Von jetzt an geht die Arbeit wieder ihren gewöhnlichen Gang. Man stellt im Knotenpunkte 5 Gleichgewicht her, wobei man die Spannungen der Stäbe 5 7 und 5 5′ gleich 5′ 7 und 5′ 8 erhält. Schliesslich bildet man für die Knoten 6 und 7 geschlossene Poly-

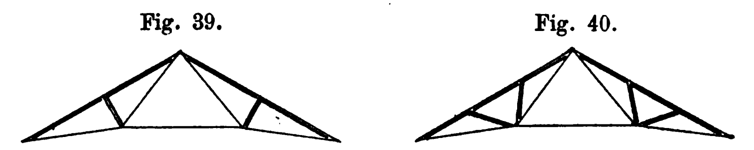
gone. Der Symmetrie wegen kann man sich die Berechnung der rechtsseitigen Stuhlhälfte ersparen.

Bezüglich der im Kräfteplan gewählten Bezeichnung sei noch Folgendes bemerkt: Um die Kraft eines Zugbandes zu finden, hat man im Kräfteplan die gleichbezeichnete Strecke aufzusuchen und deren eventuelle Fortsetzung nach rechts hinzuzufügen. Die in den Pfosten wirkenden Druckkräfte werden durch die Strecken 1 4, 3 7 und 4 8 angegeben. Endlich stellen die vier zum Sparren parallel laufenden Linien die Pressungen in dessen vier Teilen dar.

Teilt man diese Linien durch zwei senkrecht auf ihnen stehende, durch 5 und 8 gehende (punktirte) Linien in drei Teile, so stellt der linke Teil die von der Armirung und der mittlere die vom Fachwerk herrührenden Kräfte dar, während der kleine rechte Teil von den Seitenkräften herkommt, welche entstehen, wenn man die gegebenen Lasten parallel und normal zum Sparren zerlegt.

Wenige Worte werden genügen, um die Figuren 7 und 8 zu erklären, in denen der Einfluss des auf die rechte und linke Dachhälfte treffenden Winddruckes bestimmt worden ist.

Fig. 39. Fig. 40.



Der Normaldruck wurde auch hier zu 1,16 t für jeden Knotenpunkt angenommen. Der Gesamtdruck wurde in eine lotrechte, durch A gehende Seitenkraft und eine schiefe, durch B gehende zerlegt; hierauf wurde in ähnlicher Weise wie oben vorgegangen. Da die gegebenen äusseren Kräfte hier bereits in der Richtung der Pfosten wirken, so fallen die Kräftepläne in gewisser Beziehung noch einfacher aus als die der Figur 6. Die drei Pfosten und die zwei Bänder, welche die Füllung des armirten Balkens bilden, sind auf der dem Winde abgewandten Seite spannungslos. Im Uebrigen wirken sämtliche Kräfte in dem nämlichen Sinne wie die von der verticalen Belastung herkommenden; man hat daher auch hier, wie beim englischen Dachstuhl, die Windspannungen (und zwar je die grössere aus den Figuren 7 und 8) zu den früheren Kräften zu addiren, um die Maximal-Inanspruchnahme zu erhalten.

In die Figur 5 haben wir den Einfluss der verticalen und denjenigen der rechtsseitigen Windbelastung (letzteren in Klammern) in Zahlen eingeschrieben. —

Weit einfacher gestaltet sich der Kräfteplan des umstehend dargestellten französischen Dachstuhles (Fig. 39), und nur wenig umständlicher als dieser wird der Plan des sogenannten „belgischen“ Stuhles (Fig. 40). Der gewöhnliche Weg des Zerlegens führt hier ohne jede Schwierigkeit zum Ziele.

23. Der Sichelträger.

(Tafel 4_{9-11}.)

Unter den eisernen Dachstuhlfachwerken mit gekrümmtem Obergurt erfreut sich der sogenannte Sichelträger vielfacher Verwendung. Die beiden Gurtungen werden dabei in der Regel Parabeln um- oder eingeschrieben, und es gelten daher für diesen Dachstuhl die Ergebnisse der Nummer 14; denn dass der untere Streckbaum hier nicht geradlinig, sondern des leichteren Aussehens und des Raumgewinnes wegen nach oben gekrümmt ist, ändert an jenen Entwicklungen, wie man sich leicht überzeugen kann, nichts. Die hier folgenden Berechnungen können daher in gewissem Sinne als Fortsetzung und Ergänzung der Nummer 14 gelten.

Wir wählen zur näheren Behandlung das auf der Tafel 4_9 dargestellte Fachwerk. Seine Spannweite betrage 35 *m*, die Pfeilhöhe des oberen Streckbaumes 7,0 *m*, diejenige des unteren 2,3 *m*, somit die Fachwerkshöhe 4,7 *m*. Die Belastung betrage, auf den Quadratmeter bezogen, 50 *kg* für das Fachwerkgewicht, 40 *kg* für die Dachdeckung und 70 *kg* für den Schnee. Den Winddruck lassen wir vorderhand ausser Acht. Bei einer Dachbinderentfernung von 3,6 *m* ergibt sich hiernach die Eigengewichtslast auf den laufenden Meter $g = (50 + 40) . 3{,}6 = 324$ *kg*, die zufällige Last $p = 70 . 3{,}6 = 252$ *kg* und die Gesamtlast $q = 576$ *kg*.

Man kann sich freilich fragen, ob man den Schnee als eine veränderliche Belastung im gewöhnlichen Sinne, das heisst, als eine Last ansehen soll, welche den Stuhl auf verschieden lange Strecken bedecken kann. In manchen Fällen mag die Annahme genügen, der Schnee bedecke, wenn er überhaupt vorhanden ist, die ganze Offnung. Vielfach kann aber auch, sei es durch Wegschmelzen oder Wegwehen, eine teilweise Ueberdeckung eintreten. Wir wollen, um die Aufgabe allgemeiner zu halten, letzteres voraussetzen.

Nach den Ergebnissen der Nummer 14 findet man nun die in den Gurtungen und Diagonalen wirkenden Kräfte durch Multiplication der Stablängen mit einem bestimmten Factor, und nur die Pfostenkräfte erfordern eine umständlichere Ableitung.

Der für die Streckbaumstäbe anzuwendende Factor ist nach früher (Seite 56) gleich $\frac{q\,l^2}{8\,h\,f}$, in unserem Falle also gleich $\frac{576\,.\,35^2}{8\,.\,4{,}7\,.\,5{,}0} = 3753\ kg$. Wir zeichnen nun einen Kräftemassstab (der erste in der Figur 9), in welchem 1 *m* im Massstab der Zeichnung obige Kraft oder umgekehrt $\frac{1}{3{,}753}$ Meter eine Tonne darstellt; dann brauchen wir, um die Maximalkräfte zu finden, blos die einzelnen Stablängen in den Zirkel zu nehmen und die entsprechenden Kräfte auf dem Massstabe abzugreifen.

Für die Minimalkräfte wird der Factor gleich $\frac{g\,l^2}{8\,h\,f} = 2111\ kg$; für diese ist der zweite Massstab gezeichnet worden, in welchem $\frac{1}{2{,}111}$ Meter einer Tonne entspricht. Die hiernach bestimmten grössten und kleinsten Streckbaumkräfte sind in der Figur 9 beigeschrieben worden.

Die Diagonalen werden bekanntlich von der constanten Last g gar nicht beeinflusst; ihre grössten Spannungen werden (Seite 57) durch Multiplication ihrer Längen mit $\frac{pl^2}{8\,(l+f)\,h}$ gefunden. Auf unser Beispiel angewendet, ergibt sich dieser Factor gleich $\frac{252\ .\ 35^2}{8\,.\,(35+5)\,.\,4{,}7} = 205\ kg$; ihm entspricht der dritte Kräftemassstab, und die mit diesem bestimmten Spannungen haben wir ebenfalls in die Figur eingeschrieben. Schon die grosse Verschiedenheit der Massstäbe lässt erkennen, wie ausserordentlich schwach die Diagonalen gegenüber den Gurtungen beansprucht sind. Die Minimal-Spannungen der ersteren sind bekanntlich gleich null.

Was nun die Pfostenkräfte betrifft, so tritt deren grösste Zugkraft wie bei allen Parabelträgern bei vollständiger Belastung ein. Man stellt sich hierbei den untern Streckbaum am besten als ein parabolisches Seilpolygon vor, an welchem vertical aufwärts gerichtete Kräfte wirken, und das man durch einen geradlinigen Stab AB abgesteift denken kann. Die Pfostenkräfte müssen bei gleicher Fachlänge alle einander gleich sein. Nennt man die einzelne Kraft V, so wird die Belastung pro Längeneinheit $r = \frac{V}{f}$.

Diese nach oben gerichtete Belastung bewirkt im Streckbaum die nämliche Horizontalspannung wie die ganze Belastung q des Fachwerks, und da bei gleicher Horizontalkraft die Belastungen sich wie die Pfeilhöhen der Parabeln verhalten, so verhält sich r zu q wie die Pfeilhöhe der untern Gurtung zur Fachwerkshöhe. Es ist somit $r : q = 2{,}3 : 4{,}7$, hieraus $r \doteq 0{,}282\, t$ und $V = r \,.\, f = 1{,}410\, t$. Hierzu hat man noch das Eigenwicht eines untern Knotenpunktes hinzuzufügen; verteilt man das Gewicht des Fachwerkes zu $^1/_4$ nach unten und zu $^3/_4$ nach oben, so beträgt dieses Knotengewicht $^1/_4 \,.\, 0{,}05 \,.\, 3{,}6 \,.\, 5{,}0 = 0{,}225\, t$, die gesamte Pfostenzugkraft somit $1{,}635\, t$. Wirkt auf den Träger blos sein eigenes Gewicht, so muss bei der Berechnung von r die Grösse q durch g ersetzt werden. Dann findet man $r = 0{,}159\, t$, $V = 0{,}793\, t$ und die Pfostenkraft gleich $1{,}018\, t$.

Die grösste Druckkraft der Pfosten tritt im Allgemeinen dann ein, wenn die zufällige Last die Oeffnung einseitig bedeckt; da jedoch für eine von rechts her vorgeschobene Last die Drehpunkte der Pfosten 2 14 und 3 13 innerhalb der Spannweite liegen, so verhalten sich diese wie die Gurtungen, das heisst ihre grösste Druckkraft oder richtiger gesagt ihre kleinste Zugspannung tritt ein, wenn nur das Eigengewicht wirkt.

Um die Druckkräfte der übrigen 4 Pfosten zu bestimmen, haben wir das in der Nummer 9 (Seite 28) abgeleitete Verfahren eingeschlagen. In der Figur 9 (Tafel 4) wurde unter dem Fachwerk die parabolische Kurve der Auflagerdrücke gezeichnet, deren Endordinate im Massstab $1\, t = 10\, mm$ gleich $^1/_2\, p\, l = {}^1/_2 \,.\, 0{,}252 \,.\, 35 = 4{,}41\, t$ ist. Der Textfigur 18 (Seite 29) entsprechend wurde sodann für jeden Pfosten der Grenzpunkt C bestimmt und in die Parabel hinuntergelotet, hierauf die Parabelordinate von B_1 aus auf die rechtsliegende Pfostenverticale projicirt und die Projection schliesslich von dem vertical unter dem Drehpunkte gelegenen Punkte D_1 aus auf die Auflagerlinie hinüberprojicirt. Diese Zeichnung ist für die Pfosten 4 bis 7 durchgeführt und soweit es der Raum und die Deutlichkeit gestatteten, ausgezogen worden. Die Ergebnisse sind schliesslich von dem Einfluss des Eigengewichtes ($1{,}0\, t$ für jeden Pfosten) abgezogen und die Unterschiede ebenfalls in das Fachwerksgerippe eingeschrieben worden. Für linksseitige Belastung sind die Zahlen symmetrisch zu vertauschen.

Das für die Pfosten angewandte Verfahren verursacht mehr Mühe als die Berechnung aller übrigen Kräfte; auch das *Herzog*'sche Verfahren (S. 30) macht die Arbeit nicht geringer. Es liegt daher der Wunsch nahe, die Pfostenkräfte rascher, wenn auch nicht ganz genau bestimmen zu können. Diesem Bedürfnisse kann man dadurch entsprechen, dass man die gesuchten Druckkräfte gleich wie diejenigen der Diagonalen durch Uebertragen der Pfostenlänge auf den dritten Massstab bestimmt. Wie man sieht, (und wie sich auch durch eine Formelrechnung zeigen lässt) erhält man hierbei fast durchgehend etwas zu grosse Werte.

Es bleibt uns jetzt noch die Ermittlung des Windeinflusses übrig.

Die Figur 10 enthält die betreffende Zeichnung für rechtsseitigen, die Figur 11 diejenige für linksseitigen Winddruck. Das rechte Auflager ist dabei fest, das linke beweglich vorausgesetzt worden. Für die Windrichtung haben wir eine um 15° geneigte Linie und als Winddruck 0,10 t auf den m^2 angenommen.

Zunächst mussten die auf die einzelnen Knoten treffenden Drücke bestimmt werden. Zu diesem Zwecke halbirten wir die oberen Gurtungsstäbe (richtiger die krummlinig gedachten Dachflächen zwischen je zwei Knoten) und zogen durch die Mitten Parallelen zur Windrichtung bis zu einer auf dieser senkrechten Linie ww. Dadurch wurden daselbst die einzelnen Windkräfte abgeschnitten, und zwar, da das Fachwerk im Massstabe 1 : $333^1/_3$ gezeichnet ist und die Binderentfernung 3,6 m beträgt, im Massstab $\frac{1}{333^1/_3}$ Meter gleich 3,6 . 0,10 Tonnen oder 1 mm = 0,12 t. Der hiernach gezeichnete Massstab ist der fünfte in der Figur 9.

Zeichnet man hierauf über den einzelnen Strecken der Linie ww rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten normal und parallel zur Dachfläche laufen, so werden die einzelnen Kräfte in ihre Seitenkräfte T und N (Textfig. 36) zerlegt. Die zur Dachfläche parallelen Katheten sind die das Fachwerk belastenden Normalkräfte.

In der Figur 10 haben wir diese zu einem Kräftepolygon zusammengesetzt, in der Figur 9 durch ein (wieder ausgelöschtes) Seilpolygon den Mitteldruck W bestimmt und diesen wie in den Figuren 3 und 7 in die zwei Auflagerdrücke A und B zerlegt. Hierauf wurde wie früher ein *Cremona*'scher Kräfteplan gezeichnet. Da wir den Gang dieser Arbeit als bekannt voraussetzen, so bedarf die Figur 10 keiner weiteren Erläuterung. Nur das sei bemerkt, dass von den zwei Diagonalen eines Feldes stets die nach rechts

fallende, das heisst diejenige als wirksam betrachtet wurde, welche von dem Winddrucke auf Zug in Anspruch genommen wird.

In der Figur 11 endlich wurde dieselbe Arbeit für einen von links wehenden Wind durchgeführt. Die einzelnen Normaldrücke und deren Mittelkraft W' wurden einfach durch symmetrische Uebertragung gefunden, sodass man das Kräftepolygon 1 bis 5 ohne weitere Vorbereitung auftragen und die Zerlegung in A' und B' vornehmen konnte.

Betrachtet man die Ergebnisse der Figuren 10 und 11 näher, so erkennt man, dass die obere Gurtung vom Winde durchgehends auf Druck, die untere meistens auf Zug in Anspruch genommen wird; nur in den Stäben 8 bis 12 entsteht bei linksseitigem Winde infolge der flach verlaufenden Kraft B' Druck. Diese Druckkräfte, welche das früher gefundene Minimum der Zugkraft etwas herunterziehen, sind indessen nicht bedeutend; der grösste Wert beträgt 1,3 *t*. Wichtiger sind die Vergrösserungen, welche die Druckkräfte der oberen und die Zugkräfte der unteren Gurtung erfahren; sie sind bei rechtsseitigem Winde erheblicher als bei linksseitigem und erreichen für die obere Gurtung im Maximum 4,1 *t* (Stab 6 7) und für die untere 4,0 *t* (Stab 9 8) also etwa $^1/_5$ des der verticalen Belastung entsprechenden Wertes.

Von den Diagonalen erfährt je die der Windseite zunächst liegende die grösste Beanspruchung und zwar je 1,3 *t*; nach der gegenüberliegenden Seite hin nimmt der Einfluss allmälig ab.

Die Pfosten werden vom Winde fast ohne Ausnahme auf Druck in Anspruch genommen, und zwar wird die Kraft auch hier nach der vom Winde abgewendeten Seite zu allmälig geringer. Der grösste Wert beträgt 0,6 *t*; er ist von dem früher erhaltenen Zugminimum abzuziehen. Es folgt hieraus, dass gelegentlich in einzelnen Pfosten auch ein schwacher Druck auftreten kann.

24. Unregelmässige Dachstühle.

(Tafel 4_{12-15}.)

Wie bereits erwähnt worden ist, kommen namentlich unter den hölzernen Dachstühlen häufig unklare Fachwerke vor, deren regelrechte statische Berechnung allerhand Schwierigkeiten bereitet. Zuweilen kann man diese Bauwerke als statisch unbestimmte

Fachwerke oder als Bogenträger behandeln. Zuweilen behilft man sich mit kleinen Vernachlässigungen oder mit Annahmen, die der Wahrheit nahe kommen. Manche dieser Dachstühle sind aber auch so verwickelt, dass eine sorgfältige Berechnung fast unmöglich wird und man auf blosses Schätzen angewiesen ist. Eine allgemeine Regel zur Behandlung dieser Bauwerke lässt sich nicht geben; es gehört vielmehr nicht selten ein entwickelter statischer Sinn dazu, das beste Mittel zur Lösung der Aufgabe zu finden. Dass auch die Kräftepläne unter solchen Umständen nicht immer so klar und übersichtlich wie bisher werden können, ist einleuchtend. Der Winddruck wird gewöhnlich unberücksichtigt gelassen oder blos summarisch in Rechnung gezogen.

Zwei Beispiele von hölzernen Dachstühlen, die noch zu den einfacheren zählen, zeigt uns die Tafel 40 in den Figuren 12 und 14. Der erstere Stuhl trägt ein gewöhnliches Satteldach; der letztere überdeckt einen runden Lokomotivschuppen, unterstützt somit ein kegelförmiges Dach. Als solchen müssten wir ihn zwar unter die »räumlichen« Fachwerke rechnen; doch erleidet das Berechnungsverfahren aus diesem Grunde keine Aenderung.

In beiden Figuren (12 und 14) ist auf der einen Hälfte das Balkenwerk gezeichnet, während die andere Hälfte den Wirkungssinn der Kräfte zeigt, wobei einfache Linien Zugkräften und doppelte Druckkräften entsprechen; punktirte Linien deuten an, dass das betreffende Glied gar nicht beansprucht wird. —

Der durch die Figur 12 dargestellte Dachstuhl habe an den Knotenpunkten 1 bis 5 die in der Figur 13 mit denselben Ziffern bezeichneten Lasten zu tragen. Die Last 1 geht unmittelbar auf den Pfosten 1 9 über und kommt weiter nicht in Betracht. Die Last 2 zerlegt sich in die Seitenkräfte 2 3 und 2 7; erstere ist eine Zug-, letztere eine Druckkraft. Die von 2 nach links fallende Strebe bleibt von der Last 2 unbeeinflusst, da ihr Fusspunkt keine Horizontalverspannung besitzt. Den Knoten 3 vorläufig überspringend, zerlegen wir die Last 4 nach den Richtungen 4 3 und 4 6. Dann vereinigen wir im Knoten 3 die Kräfte 2 3 und 3 4 mit der Last 3 und zerlegen die Mittelkraft nach 3 6 und 3 7. Hierauf wird die Last 5 nach 5 6 und 5 6′ zerlegt und für den Knoten 6 ein geschlossenes Polygon gezeichnet, wodurch man die Kraft 6 7 erhält. In 6 6′ wirkt keine Spannung.

Geht man endlich noch zum Punkte 7 über, so erkennt

man, dass dort nicht auf gewöhnliche Art Gleichgewicht hergestellt werden kann; die Kräfte 2 7, 3 7 und 6 7 ergeben nämlich keine lotrechte, mit 7 8 zusammenfallende, sondern eine schwach geneigte Mittelkraft. Zerlegt man diese in eine lotrechte und eine wagrechte Seitenkraft, so erhält man eine kleine Kraft (7), welche, da ein Zugband 7 7′ fehlt, den Pfosten 3 8 auf Biegung in Anspruch nimmt. Wollte man sie nach 7 2 und 7 8 zerlegen, so stiesse man in 2 oder 10 auf dieselbe Schwierigkeit. Ein Teil der Kraft (7) wird nun durch den Biegungswiderstand des Sparrens, ein andrer durch die Steifigkeit der Balken des Mittelschiffes aufgenommen; auch die horizontale Zange, welche die zwei Pfosten und die drei Streben übergreift, trägt zur Verteilung der Kraft (7) bei und wird daher als nützliches Glied beibehalten, trotzdem wir keine directe Kraft für sie gefunden haben. Dasselbe gilt von der punktirten Strebe des Seitenschiffes, welche ebenfalls die Steifigkeit des Ganzen erhöht. Diese gemeinsame Wirkungsweise zahlenmässig zu verfolgen, dürfte nur schwer gelingen, und da die Kraft (7) überdies geringfügig ist, so begnügen wir uns damit, sie gänzlich dem Pfosten 3 8 zu übertragen. Letzterer ist daher nach der zusammengesetzten Biegungsfestigkeit (vgl. Teil I der »Anwendungen«, Nr. 13 und 20) zu berechnen. Das Gleiche ist auch für den Sparren der Fall, vorausgesetzt, dass die Dachdeckung auf dessen ganzer Länge und nicht blos an den Knotenpunkten aufruht.

Zum Schluss machen wir noch darauf aufmerksam, wie klein verhältnismässig die gefundenen Kräfte sind. Dies wird namentlich recht augenfällig, wenn man die Figur 13 mit den Kräfteplänen 2 und 6 vergleicht. Wie man leicht erkennt, liegt die Ursache hiervon einerseits in der verminderten Spannweite des Dachstuhles 12, andrerseits in der steilen Stellung der tragenden Streben.

Von einer Untersuchung des Windeinflusses haben wir hier abgesehen, da sie nur unter mehr oder weniger willkürlichen Annahmen durchgeführt werden könnte. —

Als ein Beispiel eines sehr schönen und vollkommen klaren Fachwerkes besprechen wir schliesslich noch den durch die Figur 14 dargestellten Dachstuhl.

Die Lokomotivrotunde bestehe aus 8 ganzen oder 16 Halbgespärren. Der Durchmesser sei gleich 36 *m* und die Belastung des Daches betrage auf den Quadratmeter Grundfläche 0,18 *t*. Der Massstab der Figur ist 1 : $333^1/_3$, derjenige der Kräfte 1 *mm* = 0,2 *t*.

Zunächst wurde (Figur 14) der Grundriss eines Sectors gezeich-

net und auf einfache Weise die Fläche bestimmt, welche jedem der Knotenpunkte 1 bis 5 zukommt. Verwandelt man diese trapezförmigen Figuren auf die Basis 10 *mm*, so erhält man sofort die im Kräfteplan (Figur 15) aufzutragenden Kräfte. Denn in diesen Trapezen entspricht jedem Quadratmeter eine Last von $333^1/_3{}^2 . 0{,}18 =$ 20000 Tonnen oder jedem Quadratcentimeter eine Last von 2 Tonnen. Soll im Kräfteplane jeder Centimeter 2 Tonnen darstellen, so muss man daher die Flächen durch 1 *cm* dividiren.

Nun wird auf bekannte Weise nach dem *Cremona*'schen Verfahren vorgegangen. Von Punkt zu Punkt weitergehend, wird jeweilen zwischen den äusseren und inneren Kräften Gleichgewicht hergestellt. Man beginnt dabei mit dem Punkte 1 und findet die Kräfte 1 2 und 1 7. In 2 setzt man die äussere Last mit 1 2 zusammen und zerlegt die Summe nach 2 3 und 2 7. Hierauf geht man zu 7 über, wo vier innere Kräfte sich das Gleichgewicht halten, alsdann zu den Punkten 3, 4, 5 und 6. Am Schluss findet man auch die in den zwei Säulen wirkenden Drücke *A* und *B*. Weitere Erläuterungen können wir uns ersparen. Zug- und Druckkräfte sind wie früher durch einfache und doppelte Linien unterschieden.

Für die in der Figur 14 rechts punktirten Stäbe erhält man bei diesem Vorgange keine Kräfte; sie könnten zur Not wegfallen, tragen aber immerhin zur Steifigkeit des Ganzen bei und gestatten günstigere Holzverbindungen. Die vom Punkte 2 ausgehende Zange schützt überdies die Strebe 1 7 vor dem Knicken. Ein Teil der in der Strebe 2 7 wirkenden Druckkraft pflanzt sich freilich auch in der punktirten Verlängerung derselben weiter fort, aber jedenfalls nur ein kleiner Teil, da sich diese Fortsetzung bei *A* auf einen nachgiebigen Pfosten stützt, während der Stab 7 6 an seinem untern Endpunkt einen festen Knotenpunkt findet. —

Auf ähnliche Weise wie bei diesen zwei Beispielen wird man sich bei der Berechnung anderer unregelmässiger Fachwerke zu helfen suchen; nicht immer aber gelingt es, die Aufgabe auf so leichte Art zu bewältigen. Einige weitere hierher gehörende Beispiele sollen übrigens im vierten Teile dieses Werkes bei den Lehrgerüsten der steinernen Brücken besprochen werden, welche ebenfalls vielfach zu den unregelmässigen Fachwerken gehören.

Drittes Kapitel.

Elastische Formänderungen.

25. Das Williot'sche Formänderungspolygon.

Die Bestimmung der elastischen Formänderungen der Fachwerke dient zunächst dazu, die bei Belastungsproben eintretenden Durchbiegungen von vornherein angeben und mit den gemessenen Werten vergleichen zu können. Sodann bildet die Ableitung der Formänderungsgesetze die Grundlage zur statischen Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke (4. Kapitel). Im Weiteren finden die im vorstehenden Kapitel entwickelten Regeln und Verfahren in der Behandlung der continuirlichen und der Bogenfachwerke Verwendung.

Zur Bestimmung der Formänderung eines Fachwerkes stehen uns in der graphischen Statik verschiedene Wege zur Verfügung, von denen je nach den gestellten Anforderungen bald der eine bald der andre sich mehr empfiehlt. Den ersten und nächstliegenden Weg hat der Franzose *Williot* eingeschlagen. (*Annales du Génie Civil 1877.*) Er besteht in der unmittelbaren Aneinanderreihung der Längenänderungen der einzelnen Stäbe.

Betrachten wir zunächst ein von drei Stäben gebildetes Dreieck ABC (Fig. 41) und setzen wir der Einfachheit wegen voraus, es werden alle drei Stäbe von Zugkräften in Anspruch genommen. Dann lassen sich die elastischen Verlängerungen der Stäbe nach der Formel

$$\Delta s = \frac{S\,s}{F\,E}$$

berechnen, worin S die Stabkraft, s die Stablänge, F den Flächeninhalt des Stabquerschnittes und E den Elasticitätscoefficienten des Materials bezeichnet.

Denkt man sich nun den Knotenpunkt A, sowie die Richtung des Stabes $A\,B$ festgehalten, so verschiebt sich der Punkt B offenbar in der Richtung AB um die Strecke Δs_1; er gelange hierbei nach B'. Die Verschiebung des Punktes C sodann wird folgender-

massen bestimmt: Man denke sich das Stabdreieck bei C für einige Zeit getrennt; dann wird sich der Stab $A\ C$ derart verlängern, dass C nach C_1 gelangt, wobei $C C_1 = \varDelta s_2$ ist. Der Stab BC erfährt neben der Verlängerung eine parallele Verschiebung und nimmt die Lage $B'\ C_2$ an. Schliesst man nun das Dreieck wieder, so bewegen sich die Punkte C_1 und C_2 auf Kreisbögen mit den Mittelpunkten A und B'. Da aber die Werte $\varDelta s$ gegenüber den Stablängen verschwindend klein sind, so kann man an Stelle der Kreisbögen deren Tangenten setzen. Man findet somit die Verschiebung des Punktes C, indem man durch C_1 eine Senkrechte zu $A\ C$ und durch C_2 eine Senkrechte zu BC zieht. Der Schnittpunkt C' beider Senkrechten gibt die Lage des Knotens C nach der Formänderung an.

Fig. 41.

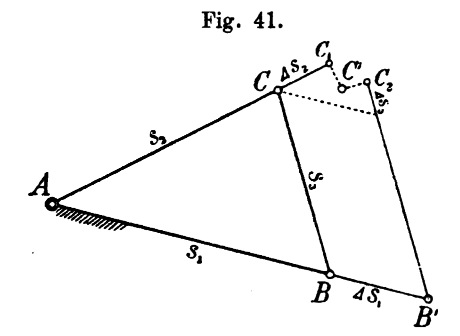


Fig. 42.

Es ist nun der besseren Uebersicht wegen zweckmässig, diese Verschiebungen in einer besonderen Figur zu zeichnen. Man trägt (Fig. 42) die Verlängerungen der Stäbe $A\ B$ und $A\ C$ von einem beliebigen Punkte O aus in Richtung und Grösse auf, fügt an erstere die Verlängerung von $B\ C$ an und zieht wie vorhin durch die Endpunkte von $\varDelta s_2$ und $\varDelta s_5$ Senkrechten zu $A\ C$ und zu $B\ C$. Dann stellen die Strahlen $O\ B$ und $O\ C$ die Verschiebungen der Punkte B und C dar. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt ohne weiteres aus der Congruenz der Figur 42 mit dem oberen Teil der Figur 41.

Auf diesem Wege kann man nun fortfahren und die Verschiebung eines vierten, mit B und C verbundenen Punktes D zeichnen. Man trägt in der Figur 42 die Verlängerung des Stabes $B\ D$ von B aus, diejenige des Stabes $C\ D$ von C aus auf und errichtet in den Endpunkten der beiden Strecken Lote auf die betreffenden Stabrichtungen.

Es entsteht auf diese Weise nach und nach das *Williot*'sche Formänderungspolygon, dessen Ecken, bezogen auf den Pol O, die Verrückungen sämtlicher Knotenpunkte nach Grösse und Richtung angeben.

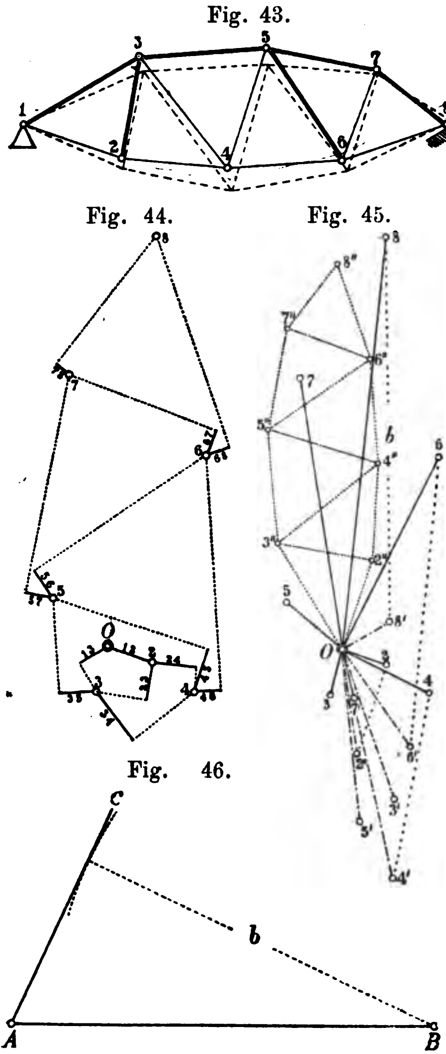
Wirkt in einem Stabe eine Druckkraft, so ist die Längenänderung in entgegengesetzter Richtung aufzutragen.

Um das Verfahren noch weiter zu erläutern, haben wir in der Figur 44 die Formänderung eines ganzen Fachwerkes gezeichnet, dessen Gerippe durch die Figur 43 dargestellt ist. In letzterer sind die Druckstäbe durch Doppelstriche hervorgehoben.

Fig. 43.

Fig. 44. Fig. 45.

Fig. 46.



Einer näheren Beschreibung bedarf die Figur 44 wohl kaum, da sie nichts weiter als Wiederholungen der Figur 42 enthält. Die Δs sind voll, die zu den Stäben senkrechten Hülfslinien punktirt ausgezogen. Die Lagen, welche die Knotenpunkte einnehmen, sind durch kleine Ringe bezeichnet.

Dagegen muss hier noch ein anderer Umstand zur Sprache kommen.

Geht man vom Knotenpunkte 1 aus und hält die Richtung des Stabes 1 2 fest, so geht das rechtsseitige Ende 8 stark in die Höhe. In der Praxis sind nun aber 1 und 8 in der Regel Auflagerpunkte, von denen der eine fest bleibt und der andre auf einer Bahn gleitet. Ist 1 das feste und 8 das bewegliche Auflager des Fachwerkes, so müssen wir das Fachwerk nachträglich noch um den Punkt 1 drehen und zwar soweit, dass der Punkt 8 zu seiner Auflagerbahn zurückkehrt. Dabei bewegen sich sämtliche Knotenpunkte in kleinen Kreisbögen, an deren Stelle wir auch hier die Tangenten setzen können. Der Punkt 4 beispielsweise bewegt sich in der zu 1 4 senkrechten Richtung und zwar um eine Strecke, welche der Länge von 1 4 proportional ist.

Um die Figur 44 nicht undeutlich zu machen, haben wir diese Aende-

rungen in der Lage der Knotenpunkte in der Figur 45 bestimmt. Die ausgezogenen Strahlen aus O geben die der Figur 44 entnommenen Bewegungen wieder, die strichpunktirten die endgültigen Verschiebungen. Die punktirten Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte sind senkrecht zu den Strahlen aus 1 in der Figur 43 und zugleich der Länge dieser Strahlen proportional.

Durch die Bedingung, dass der Strahl $O\ 8'$ parallel zur Auflagerbahn von 8 laufen muss, ist Alles bestimmt. Man zieht zunächst in der Figur 45 durch die Punkte 2 bis 8 Senkrechte zu den entsprechenden Strahlen aus 1; dann schneidet die zur Auflagerbahn parallele Linie aus O den Punkt $8'$ ab. Hierauf trägt man in einer Hülfsfigur (Fig. 46) die Strecke $A\,B$ gleich 1 8 auf, zeichnet mit der Strecke $b = 8\ 8'$ als Halbmesser einen Kreisbogen und zieht aus A die Tangente daran. Dann lassen sich die Abstände der verschiedenen Knotenpunkte von 1 mit Hülfe des Winkels $B\,A\,C$ bequem proportional verkleinern und in der Figur 45 auf die punktirten Linien übertragen.

Die Aenderung, welche wir hier nachträglich angebracht haben, lässt sich umgehen, wenn man von vornherein einen Stab kennt, der seine Richtung nicht ändert. Dies trifft bei symmetrischer Form und Belastung des Fachwerks zu, weil dann stets entweder ein mittlerer Gurtungsstab oder ein Pfosten vorkommt, der seine Richtung beibehält.

Aus der Natur der Aufgabe folgt, dass in der Figur 45 die Projection der Entfernung zweier Punkte auf deren Verbindungslinie in 43 durch die Verrückung nicht geändert wird, ein Umstand, der als Probe für die Genauigkeit und Richtigkeit der Zeichnung verwertet werden kann.

Anstatt die Punkte 2 bis 8 zu verschieben, kann man auch den Punkt O verrücken, aber in umgekehrter Richtung; O gelangt dabei der Reihe nach nach den Punkten $2''$, $3''$, $4''$ . . . . welche von den Punkten 2, 3, 4 . . . . gerade so weit abstehen, wie die Punkte $2'$, $3'$, $4'$ . . . . von O. Aus nahe liegenden Gründen bilden hierbei die Punkte $2''$, $3''$, $4''$ . . . . eine dem Fachwerk ähnliche Figur. In manchen Fällen mag diese Abänderung des Verfahrens vorteilhaft sein. (Vgl. hiermit Prof. *Mohrs* interessante Arbeit über Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne im Civilingenieur 1888.)

In dem Fachwerkgerippe der Figur 43 haben wir schliesslich, um die Formänderung noch deutlicher zu machen, die sämtlichen Knotenpunkte in der Richtung der strichpunktirten endgültigen Strahlen verschoben, jedoch nur um den zehnten Teil der Längen dieser Strahlen, und die erhaltenen Punkte durch gestrichte Linien verbunden.

26. Berechnung der Formänderungen mittelst der virtuellen Verschiebungen.

Der für gewisse Aufgaben äusserst brauchbare Satz von den virtuellen Verschiebungen lässt sich auch zur Bestimmung der Formänderung von Fachwerken verwenden. Zunächst möge eine kurze

Ableitung dieses Satzes speziell in Bezug auf Fachwerke hier Platz finden.

Es sei das Fachwerk der Figur 47 durch die im Gleichgewicht befindlichen äusseren Kräfte P_a bis P_f belastet; infolge dessen entstehen innere Stabkräfte von der Grösse K_1 K_2 etc. Ferner erfahre das Fachwerk aus irgend welchen Ursachen eine sehr kleine Formänderung und gehe in die gestricht gezeichnete Form über. Wir betonen gleich hier ausdrücklich, dass die Aenderung in der Lage der Knotenpunkte nicht eine Folge der genannten äusseren Kräfte zu sein braucht. Der Grund dieser Aenderung kann in Verlängerungen und Verkürzungen der Stäbe liegen, welche von einer anderen Gruppe von äusseren Kräften herrühren, die mit der gezeichneten nichts zu schaffen hat; oder es können Temperaturänderungen im Spiele sein.

Fig. 47.

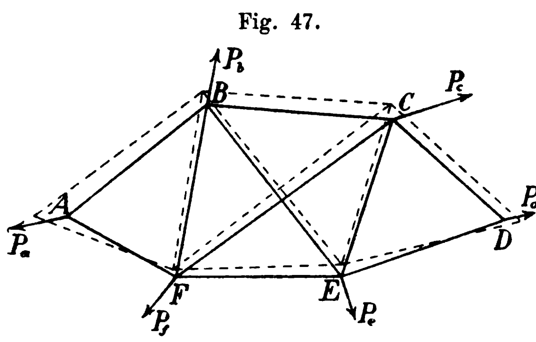


Fig. 48.



Die Figur 48 stellt den Stab $A\ B$ und seine Form- und Lageänderung in doppelter Grösse dar. A gelange nach A', B nach B'. Auf den ersteren Punkt wirken die äussere Kraft P_a und die inneren Kräfte K_1 und K_2, auf letzteren die Last P_b und die Stabkräfte K_2 bis K_5. An jedem der beiden Punkte besteht zwischen den verschiedenen Kräften Gleichgewicht. Ganz dasselbe wird an jedem anderen Knotenpunkte der Fall sein.

Zeichnet man nun für die auf A wirkenden Kräfte ein ge-

schlossenes Polygon und projicirt dieses auf die Verschiebungsrichtung *A A'*, so wird jede Kraft mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie mit *A A'* bildet. Die Summe aller Projectionen ist aber gleich null. Es folgt also die Beziehung

$$P_a \cos \alpha + K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

Ebenso findet man für den Knotenpunkt *B*

$$P_b \cos \beta + K_2 \cos \beta_2 + K_3 \cos \beta_3 + K_4 \cos \beta_4 + K_5 \cos \beta_5 = 0.$$

Aehnliche Gleichungen ergeben sich für die übrigen Knotenpunkte des Fachwerkes.

Bezeichnet man nun die Verschiebungsgrösse *A A'* der Kürze wegen mit Δa, *B B'* mit Δb und so fort, multiplicirt jede Gleichung mit der entsprechenden Verschiebungsgrösse und addirt sämtliche Gleichungen, so erhält man einen Ausdruck, in dem jede äussere Kraft einmal, jede innere zweimal vorkommt. Dabei erscheint beispielsweise die äussere Kraft P_a mit $\Delta a \cos \alpha$, das ist mit der auf die Kraftrichtung projicirten Verschiebung des Punktes *A* multiplicirt. Man nennt das Produkt $P_a . \Delta a . \cos \alpha$ die »virtuelle Verschiebung« oder die »virtuelle Arbeit« der Kraft P_a. Von den Stabkräften sodann erhält beispielsweise K_2 den Faktor $\Delta a . \cos \alpha_2 + \Delta b . \cos \beta_2$; dieser Faktor ist aber, solange die Verschiebungen unendlich klein bleiben, nichts Anderes als die negativ gerechnete Verlängerung des Stabes *A B*.

Bezeichnet man die Bewegungen der Knotenpunkte in der Richtung der äusseren Kräfte mit Δp und die Verlängerungen der Stäbe mit Δs, so ergibt sich also die interessante Beziehung

$$\Sigma (P . \Delta p) = \Sigma (K . \Delta s.)$$

In Worten: Erleidet das Fachwerk aus irgend einer Ursache eine unendlich kleine Formänderung, so ist die von den äusseren Kräften verrichtete virtuelle Arbeit ebenso gross wie die virtuelle Arbeit der Stabkräfte.

Verkürzt sich ein Stab, so ist das betreffende Δs selbstverständlich negativ einzuführen; ebenso das Δp, wenn ein Knotenpunkt sich in der der Kraft entgegengesetzten Richtung verschiebt.

(Vgl. hiermit die klassische Abhandlung Prof. *Mohr*'s: »Beitrag zur Theorie des Fachwerkes« im Civilingenieur 1885; der Verfasser geht nicht zu weit, wenn er sagt, dass dieser Satz die Grundlage der ganzen Statik bildet und demnach auch alle Formen der Gleichgewichtsbedingungen umfasst.) —

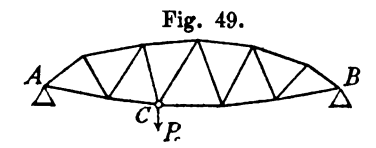
Mit Hülfe dieses Satzes kann nun leicht die Verschiebung berechnet werden, welche ein bestimmter Knotenpunkt eines Fachwerkes erfährt.

Will man wissen, um wieviel sich der Knotenpunkt C des untenstehenden Fachwerkes in verticaler Richtung unter dem Einflusse irgend einer Belastung senkt, so bestimme man zuerst die Kräfte S, welche bei dieser Belastung in den Stäben des Fachwerkes auftreten und berechne aus ihnen die Stabverlängerungen nach der Formel

$$\Delta s = \frac{S\,s}{FE}.$$

Sodann ermittle man durch einen zweiten Kräfteplan diejenigen Stabkräfte K, welche infolge einer beliebigen Last P_c entstehen. Nennt man dann noch die entsprechenden Auflagerdrücke A und B und die verticalen Bewegungen der Punkte A, B und C in der Richtung der betreffenden Kräfte $\Delta\, a$, $\Delta\, b$ und $\Delta\, c$, so führt der Satz von der virtuellen Arbeit auf die Gleichung

Fig. 49.



$$A \,.\, \Delta\, a + B \,.\, \Delta\, b + P_c \,.\, \Delta\, c = \Sigma\,(K \,.\, \Delta\, s.)$$

In der Regel wird angenommen, dass sich die Auflagerpunkte nicht senken; dann berechnet sich die Einsenkung von C nach der Gleichung

$$\Delta\, c = \frac{\Sigma(K \,.\, \Delta\, s)}{P_c} = \frac{1}{E\,P_c}\; \Sigma\left(\frac{K\,S\,s}{F}\right).$$

Will man diesen Ausdruck auf zeichnerischem Wege berechnen, so kann dies mittelst eines Summationspolygones geschehen. (Vgl. *Culmanns* Graph. Statik, S. 21.) Dabei benützt man am besten die Quotienten $F : s$ als Polweiten. Meistens wird es indessen bequemer sein, nur die Kräfte K und S zeichnerisch zu ermitteln und hierauf zur Zahlenrechnung zu greifen.

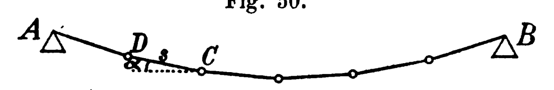
Es leuchtet ein, dass auf dem angegebenen Wege nur die Bewegung eines einzelnen Knotenpunktes und dazu nur dessen verticale Bewegung gefunden wird. Will man die Verschiebung eines andern Punktes kennen, so muss die Arbeit wiederholt werden. Von dieser Seite betrachtet erscheint das Verfahren unvollkommen gegenüber dem *Williot*'schen. Nichtsdestoweniger nimmt es eine berechtigte Stellung ein, da man in der Praxis (bei Brückenproben) häufig nur nach der Einsenkung eines einzigen Punktes, der Brückenmitte frägt.

27. Die Durchbiegungskurve als Seilpolygon.

Ein dritter Weg zur Bestimmung der Formänderung eines Fachwerkes, speziell zur Bestimmung der Durchbiegungskurve einer ganzen Gurtung bietet sich uns dar, wenn wir von den Aenderungen ausgehen, welche die von den Gurtstäben gebildeten **Winkel** erfahren.

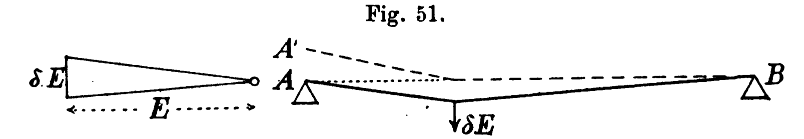
Es sei (Fig. 50) $A\,B$ die untere Gurtung eines Fachwerkes und es vermindere sich infolge der elastischen Formänderung des Fachwerkes der Winkel, welchen die bei C zusammenstossenden Stäbe miteinander bilden, um die Grösse δ. Denkt man sich zuerst die Gurtung in B eingespannt und alle andern Winkel unverändert, so wird

Fig. 50.



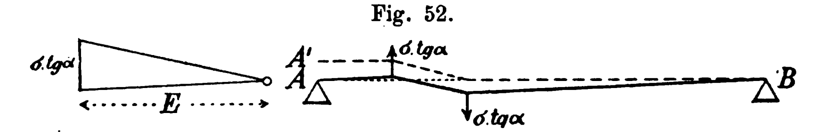
der Teil $A\,C$ sich etwas heben. Da die Winkeländerung eine sehr kleine ist, hebt sich jeder Punkt von $A\,C$ vertical um

Fig. 51.



eine Strecke, die seinem Abstande von der Verticalen durch C proportional ist. Dreht man jetzt die Gurtung um den Punkt B so

Fig. 52.



weit, dass der gehobene Punkt A wieder in die frühere Höhenlage zurückkehrt, so senken sich sämtliche Punkte der Gurtung im Verhältnis ihrer Entfernungen von der Lotlinie durch B.

In der Figur 51 stellt die gestrichte Linie $A'\,B$ die anfängliche Hebung des Teiles $A\,C$ und die voll gezogene Linie $A\,B$ die endgültige Senkung der Gurtung dar.

Die gebrochene Linie $A\,B$ kann man nun als ein **Seilpolygon** ansehen. Lässt man nämlich senkrecht unter C die Kraft $\delta\,.\,E$ an einem geradlinigen Balken angreifen und zeichnet

ein Kräftepolygon mit der Polweite E, so entsteht als Seilpolygon die Linie $A\,B$.

Aendern sich nun auch die übrigen Winkel, welche die Gurtungsstäbe miteinander bilden, so addiren sich die verschiedenen Folgen. Man hat daher, um sämtliche Aenderungen zu berücksichtigen, lotrecht unter jedem Knotenpunkte den entsprechenden Wert von $\delta . E$ als belastende Kraft einzuführen und für sämtliche Lasten ein Seilpolygon zu zeichnen.

Neben den Winkeländerungen haben aber auch die Verlängerungen der Stäbe Einfluss auf die Einsenkungen.

Denken wir uns, es verlängere sich zunächst nur der Stab $C\,D$ und zwar um die Grösse Δs, so werden sich, wenn der Teil $C\,B$ festgehalten wird, alle links von C liegenden Knotenpunkte parallel zu $C\,D$ um Δs verschieben; sie heben sich dabei sämtlich um $\Delta s \,.\, \sin \alpha$. Die gestrichte Linie $A'\,B$ in der Figur 52 stellt diese Hebungen dar. Der Ablenkungswinkel an den beiden Bruchpunkten dieser Linie ist

$$\frac{\Delta s \,.\, \sin \alpha}{s \,.\, \cos \alpha} = \frac{\Delta s}{s} \,.\, \tan \alpha = \frac{\sigma \,.\, \tan \alpha}{E}.$$

Dreht man die Gurtung jetzt wieder um B, so dass A' nach A zurückkehrt, so gelangt man auf die gebrochene Linie $A\,B$.

Auch diese Linie kann als Seilpolygon aufgefasst werden, und zwar hat man hierbei senkrecht unter C und D zwei entgegengesetzt wirkende Kräfte von der Grösse $\sigma . \tan \alpha$ am Balken wirken zu lassen.

Fügt man jetzt diese Kräfte zu den vorigen hinzu, so gelangt man schliesslich zu folgendem Verfahren:

Zuerst werden (Fig. 53) die Werte $\delta . E$, die mit dem Elasticitätscoefficienten multiplicirten Winkeländerungen, als verticale Kräfte aneinander gereiht. (Kräfte 1 bis 6.) Dann verschiebt man jeden Punkt dieses Kräftepolygons um den betreffenden Wert $\sigma \,.\, \tan \alpha$ aufwärts (bei negativem α abwärts). Dadurch entsteht ein neues Kräftepolygon (1′ bis 6′), und mit diesem zeichnet man schliesslich das Durchbiegungspolygon $A_1\,B_1$. (Vgl. hierüber *Müller-Breslau*'s »Neuere Methoden der Festigkeitslehre etc.« § 5.)

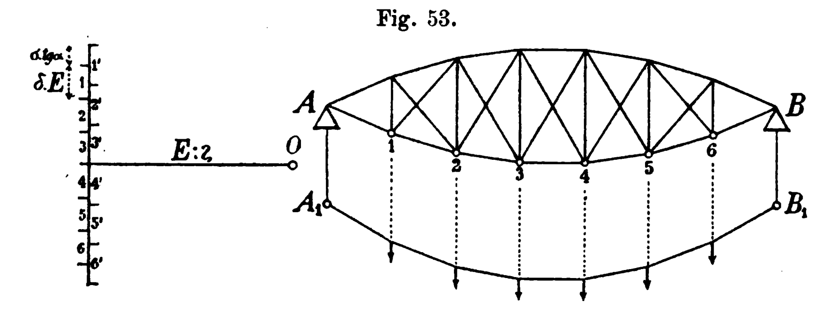
Bei geradliniger unterer Gurtung verschwinden natürlich die Werte $\sigma \,.\, \tan \alpha$, und das erste Kräftepolygon (1 bis 6) ist massgebend. —

Alle diese Schlussfolgerungen setzen voraus, dass die elastischen

Formänderungen im Verhältnis zur Ausdehnung des Fachwerks verschwindend klein sind, wie dies auch thatsächlich der Fall ist. Will man aber die Einsenkungen deutlich und abmessbar darstellen, so muss man sie in vergrössertem Massstabe zeichnen. Dies geschieht am besten dadurch, dass man die Polweite des Kräftepolygons nicht gleich E, sondern gleich einem Bruchteil von E, gleich $E:\mathfrak{z}$ macht. Denn hierdurch werden alle verticalen Ordinaten der Durchbiegungskurve $\mathfrak{z}$-mal grösser.

Wählt man $\mathfrak{z}$ speziell gleich dem reciproken Werte des Massstabes, in welchem man das Fachwerk zeichnet, so erscheinen die Einsenkungen in natürlicher Grösse.

Fig. 53.



Das beschriebene Verfahren setzt die Kenntnis der Winkeländerungen δ voraus. Auf welchem Wege diese bestimmt werden können, soll später (Nr. 43) bei der Behandlung der secundären Spannungen gezeigt werden.

28. Bestimmung der Formänderung mittelst der elastischen Gewichte.

Die bisher besprochenen Wege zur Auffindung der elastischen Formänderungen der Fachwerke setzen alle voraus, dass man die in den Stäben wirkenden Kräfte kennt. Aendert sich die Belastung des Fachwerkes, so ändern sich auch diese Kräfte und die Arbeit muss fast in ihrem ganzen Umfange wiederholt werden. Die beschriebenen Verfahren eignen sich daher besonders da, wo nur ein einzelner Belastungsfall zu behandeln ist.

Sollen dagegen verschiedene Belastungsfälle untersucht werden, soll man rasch und bestimmt sagen können, welche Verschiebungen

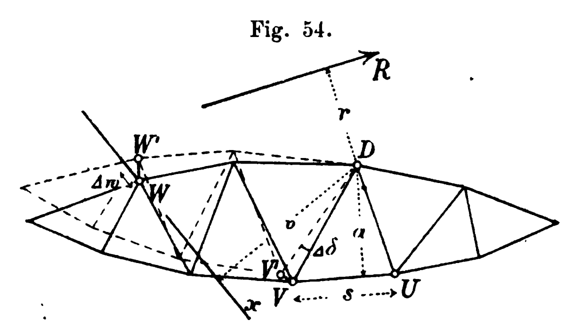
ein Knotenpunkt unter fortwährend wechselnden äusseren Kräften annimmt, so reichen obige Verfahren kaum mehr aus. In diesem Falle ist der folgende, freilich nicht mehr so einfache Weg vorzuziehen.

Wir setzen wie bei allen Untersuchungen, die sich an die Elasticität der Baumaterialien knüpfen, voraus, die Formänderungen seien den wirkenden Kräften proportional, und zwar verhalte sich die Verlängerung beziehungsweise Verkürzung eines geradlinigen Stabes zu dessen ursprünglicher Länge wie die spezifische Spannung zum Elasticitätscoefficienten. Nennt man die Länge des Stabes s, die auf die Quadrateinheit bezogene Spannung σ und den Elasticitätscoefficienten E, so ist die Verlängerung des Stabes

$$\Delta s = \frac{\sigma \, . \, s}{E}.$$

Denken wir uns nun, es verlängere sich in dem durch die Figur 54 dargestellten Fachwerke unter der Wirkung der äusseren Kraft R einzig der Stab $U\,V$, so vollziehen infolge dessen die durch den Stab getrennten Fachwerksteile eine gegenseitige kleine Drehung um den Punkt D. Hält man die rechte Hälfte des Fachwerkes fest, so gelangt bei dieser Drehung der Punkt V nach V' und die linke Hälfte geht in die gestricht gezeichnete Lage über. Wenn hierbei alle Stäbe ausser $U\,V$ ihre Länge beibehalten, so beschreiben sämtliche Knotenpunkte der linken Fachwerkshälfte kleine Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D. Es steht daher auch die kleine Strecke $V\,V'$ auf $D\,V$ senkrecht, und wenn man den kleinen Winkel, um welchen sich $D\,V$ dreht, mit $\Delta\,\delta$ bezeichnet, so ist

Fig. 54.



$$V\,V' = D\,V \, . \, \Delta\,\delta.$$

Projicirt man die Strecke $V\,V'$ auf $U\,V$, so erhält man die Verlängerung $\Delta\,s$ des Stabes. Aus Gründen der Aehnlichkeit ver-

hält sich diese Projection zu $V\,V'$ wie a zu $D\,V$. Folglich ist

$$\varDelta s = \frac{V\,V' \, . \, a}{D\,V} = a \, . \, \varDelta \delta$$

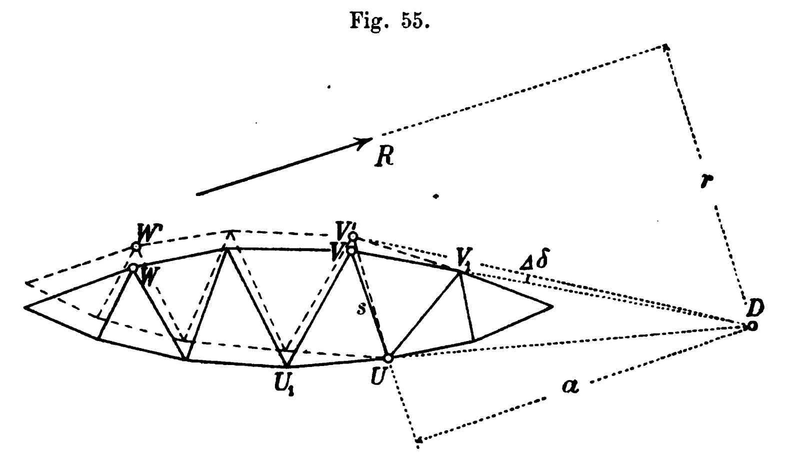
oder

$$\varDelta \delta = \frac{\varDelta s}{a}.$$

Zu dem nämlichen Ergebnisse gelangt man, wenn man einen andern Gurtungsstab sich verlängern oder verkürzen lässt. Aber auch bei den Streben des Fachwerkes ergibt sich für den Drehungswinkel derselbe Ausdruck.

Nimmt man an, dass in der Figur 55 der Stab $U\,V$ sich verlängert, während der rechts davon gelegene Fachwerksteil in seiner Lage festgehalten wird, so muss sich (da $U\,U_1$ und $V\,V_1$ ihre Länge beibehalten) der Punkt U in einer Senkrechten zu $U\,U_1$ und der Punkt V_1 in einer Senkrechten zu $V\,V_1$ bewegen. Der Stab $U_1\,V$ und mit ihm die ganze linksseitige Fachwerkshälfte vollzieht somit eine Bewegung, die man als eine Drehung um den

Fig. 55.



Punkt D, den Schnittpunkt von $U\,U_1$ und $V\,V_1$, ansehen kann. Projicirt man wie oben die Strecke $V\,V'$ auf $U\,V$, so erhält man die Stabverlängerung $\varDelta s$ und es verhält sich wiederum

$$\varDelta s : V\,V' = a : D\,V.$$

Da aber $V\,V' = D\,V \, . \, \varDelta \delta$ ist, so ergibt sich wie oben

$$\varDelta \delta = \frac{\varDelta s}{a}.$$

Es gilt demnach allgemein der Satz:

Verändert ein einzelner Stab des Fachwerkes

seine Länge, während alle andern Stäbe ihre Länge beibehalten, und wird der eine Fachwerksteil festgehalten, so vollzieht der andere eine Drehung um den Drehpunkt des verlängerten Stabes, deren Mass gleich ist der Stabverlängerung dividirt durch den Abstand des Stabes von seinem Drehpunkte. (Hinsichtlich des Ausdruckes »Drehpunkt« vgl. S. 16.)

Bezeichnet man den Hebelarm der äusseren Kraft bezüglich D mit r, so ist die im Stabe wirkende Kraft S bekanntlich gleich $\frac{R\,r}{a}$ (vgl. Nr. 6); hieraus folgt, wenn der Querschnitt des Stabes den Flächeninhalt F hat,

$$\varDelta s = \frac{S\,s}{F\,E} = \frac{R\,r\,s}{a\,F\,E} \qquad \text{und}$$

$$\varDelta \delta = \frac{\varDelta s}{a} = \frac{R\,r\,s}{a^2 F\,E}.$$

In diesem Ausdrucke bleiben die Werte s, a, F und E, weil sie nur von den Dimensionen und dem Materiale des Stabes abhängen, bei veränderlicher Belastung constant. Wir wollen diese constanten Grössen zusammenfassen und den Wert

$$\varDelta G = \frac{s}{a^2\,F\,E}$$

in Zukunft »das Gewicht des elastischen Stabes« nennen. Dann ist einfach

$$\varDelta \delta = R\,.\,r\,.\,\varDelta G.$$

In diesem Ausdrucke ist zwar r der Hebelarm der Kraft R und das Produkt beider Grössen das ursprüngliche statische Moment von R. Man kann jedoch auch umgekehrt $\varDelta G$ als ein im Drehpunkt concentrirtes Gewicht und r als dessen Hebelarm hinsichtlich der Richtungslinie von R auffassen. Dann lautet obige Gleichung, in Worten ausgedrückt, wie folgt:

Verändert ein einzelner Stab seine Länge, so vollziehen die beiden durch den Stab getrennten Fachwerkteile eine gegenseitige Drehung, deren Mittelpunkt im Drehpunkt des Stabes liegt und deren Mass gleich ist der äussern Kraft mal dem statischen Momente des im Drehpunkte concentrirten Stabgewichtes bezogen auf die Kraftrichtung.

Wird die rechtsseitige Fachwerkshälfte festgehalten, so beschrei-

ben bei dieser Bewegung, wie früher bemerkt wurde, alle Knotenpunkte der linksseitigen Hälfte kleine Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D. Speziell der Punkt W (Fig. 54 und 55) verschiebt sich hiebei nach W', und es ist die Strecke $W\,W' = W\,D\,.\,\Delta\,\delta$. Projicirt man diese Strecke auf eine beliebige Axe $W\,x$ (Fig. 54), so verhält sich die Projection $\Delta\,w$ zu $W\,W'$ wie v zu $W\,D$. Es ist daher

$$\Delta\,w = v\,.\,\Delta\,\delta = R\,.\,r\,.\,v\,.\,\Delta\,G.$$

Das Prudukt $r\,.\,v\,.\,\Delta\,G$ wollen wir im Sinne der Lehre vom Trägheitsmoment ebener Figuren das »Centrifugalmoment« des Gewichtes $\Delta\,G$ hinsichtlich der Axen R und x nennen; dann ergibt sich der Satz:

Verändert ein einzelner Stab seine Länge und wird die eine Hälfte des Fachwerkes festgehalten, so ist die Verschiebung irgend eines Punktes der andern Hälfte in der Richtung einer gegebenen Axe gleich der äussern Kraft mal dem Centrifugalmomente des im Drehpunkte concentrirten Gewichtes, bezogen auf die Richtungslinie der Kraft und die Verschiebungsaxe.

Die Grösse $\Delta\,G = \frac{s}{a^2\,F\,E}$, welche wir „das Gewicht des elastischen Stabes“ oder kurz „das Gewicht“ nennen, wird uns in Zukunft häufig begegnen. Sie entspricht dem Werte $\frac{s}{i^2\,F\,E}$, der sich uns im ersten Teile dieses Werkes *) bei der Ableitung der Formänderungen von Balkenelementen ergeben hat.

Der Ausdruck $\Delta\,G$ ist so beschaffen, dass er wohl am Besten rechnerisch bestimmt wird. Man schreibt hiebei die Werte s, a und F in einer Tabelle auf und bestimmt mit dem Rechenschieber erst das Produkt $a^2\,F$ und hierauf durch eine zweite Stellung $\frac{s}{a^2\,F}$. Den Elasticitäts-Coefficienten kann man in vielen Fällen als eine constante Grösse bei Seite lassen und, wenn es überhaupt nötig ist, erst am Schlusse der Aufgabe einführen. Die Strecken s und a misst man in der Regel am besten in Metern, F (bei Eisenconstructionen) in Quadratmetern oder Quadratcentimetern.

Die Grösse $\Delta\,G$ kann zwar auch zeichnerisch bestimmt werden. (Vgl. des Verfassers „Der elastische Bogen, berechnet mit Hülfe der graph. Statik“. Zürich 1886. S. 18). Doch wird dabei kaum etwas gewonnen.

*) Anwendung der Graph. Statik, I. Teil: Die im Inneren eines Balkens wirkenden Kräfte. (Verlag von *Meyer & Zeller*, Zürich, 1888.)

29. Die Elasticitätsellipse des Fachwerkes.

Wir fassen nun mehrere aufeinander folgende Stäbe ins Auge, deren Vereinigung wir zweckmässig ein »Fach« nennen können, und setzen dabei voraus, die äussere Kraft R sei für alle diese Stäbe dieselbe. Dann wird der Winkel, um welchen sich die eine Fachwerkshälfte gegenüber der andern dreht, gleich der Summe der einzelnen Drehungswinkel sein, also

$$\delta = \Sigma\,(\varDelta\,\delta) = R\,\Sigma\,(r\,.\,\varDelta\,G)$$

und die Verschiebung des Punktes W längs der Axe $W'x$ wird

$$w = \Sigma\,(\varDelta\,w) = R\,\Sigma\,(r\,.\,v\,.\,\varDelta\,G).$$

In diesen Ausdrücken stellt offenbar die erste Summe das statische Moment sämtlicher Gewichte, bezogen auf R, und die zweite Summe das Centrifugalmoment sämtlicher Gewichte, bezogen auf R und die Verschiebungsaxe, dar.

Es ist nun zweckmässig, die Theorie der Centralellipse ebener Figuren in unsere Betrachtungen einzuführen. Kennt man diese Ellipse, so ist bekanntlich das Centrifugalmoment der Figur in Bezug auf zwei beliebige Axen gleich dem Flächeninhalte der Figur mal dem Abstand ihres Schwerpunktes von der einen Axe mal dem Abstand des Antipoles der ersten Axe von der zweiten*).

In gleicher Weise wie eine ebene Figur lässt sich auch ein System von belasteten Punkten behandeln. Denkt man sich in der Figur 56 beispielsweise die vier Stäbe 1 bis 4 elastisch und belastet die Drehpunkte D_1 bis D_4 mit den entsprechenden Gewichten $\varDelta\,G$, so lässt sich für diese vier Punkte eine Centralellipse zeichnen, deren Mittelpunkt M mit dem Schwerpunkte der vier Gewichte zusammenfällt. Stehen dann die vier Stäbe unter dem Einflusse der Kraft R, so ist der Drehungswinkel gleich R mal dem statischen Momente des Gesamtgewichtes, also

$$\delta = R\,r\,\Sigma\,(\varDelta\,G).$$

Ferner ist die Verschiebung des Punktes W längs der Axe Wx

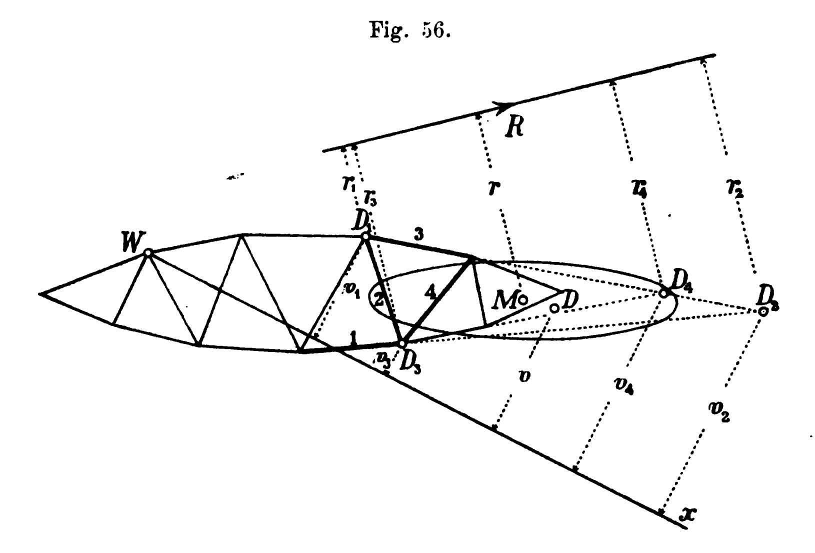
*) Vergl. *Culmanns* Graph. Statik, 2. Aufl., Seite 404; auch Schweiz. Bauztg., Bd. XI, S. 121.

gleich R mal dem Centrifugalmomente des Gesamtgewichtes, also, wenn D der Antipol der Kraftrichtung ist,

$$w = R\, r\, v\, \Sigma\,(\varDelta\, G) = \delta\, v.$$

Die Richtung der Axe $W x$ ist hierbei ganz beliebig. Lässt man sie durch den Antipol D gehen, so verschwindet offenbar die Grösse w; das heisst die Verschiebung des Punktes W in der Richtung $W D$ ist gleich null. Der Punkt W bewegt sich somit in einer Senkrechten zu $W D$. Die Grösse dieser Bewegung ist gleich $\delta \,.\, W D$. Die Verschiebung des Punktes W kann somit als eine Drehung um den Antipol D der Kraft R angesehen werden.

Fig. 56.



Gleich wie in der Figur 56 vier Stäbe vereinigt sind, lässt sich durch Vereinigung sämtlicher Stabgewichte die Elasticitätsellipse des ganzen Fachwerkes zeichnen; auch dann behalten obige Beziehungen ihre volle Gültigkeit.

Lässt man die Kraft R an einem beliebigen Knotenpunkte V der linken Fachwerkshälfte in der Richtung $V y$ wirken, so verschiebt sich der Punkt W in der Richtung $W x$ gerade soviel, wie sich umgekehrt der Punkt V in der Richtung $V y$ verschiebt, wenn die Kraft in W angreift und in der Richtung $W x$ wirkt; denn in beiden Fällen ist die Grösse der Verschiebung dem Centrifugalmomente des Gewichtes G in Bezug auf die beiden Richtungen proportional.

Damit ist der *Maxwell*'sche Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen für den vorliegenden einfachen Fall dargethan. Dass er auch für andere Fälle, das heisst unabhängig von der Art der Auflagerung

Gültigkeit besitzt, lässt sich am besten mittelst des Satzes von den virtuellen Verschiebungen (S. 108) beweisen.

Greift nämlich in dem Punkte V eines beliebig unterstützten Fachwerkes eine Kraft R an und verschiebt sich dieser Punkt infolge dessen in der Richtung der Kraft um v, so ist die virtuelle Arbeit der Kraft, da sie von null an stetig bis zu ihrem Endwerte wächst, gleich $^1/_2\, R\, v$. Lässt man dann im Punkte W ausserdem die Kraft R' angreifen und verschiebt sich infolge dessen der Punkt W in der Richtung von R' um w' und der Punkt V in der Richtung von R um v', so beträgt die virtuelle Arbeit beider Kräfte $R\, v' + {}^1/_2\, R'\, w'$. Die Summe beider Momente ist daher gleich

$$^1/_2\, R\, v + R\, v' + {}^1/_2\, R'\, w'.$$

Belastet man das Fachwerk umgekehrt zuerst mit R' und dann mit R, so ergibt sich diese Summe gleich

$$^1/_2\, R'\, w' + R'\, w + {}^1/_2\, R\, v.$$

Beide Ausdrücke sind aber gleich gross, da sie den virtuellen Arbeiten der Stabkräfte gleich sind und es für diese gleichgültig ist, ob sie auf dem einen oder andern Wege ihre Endspannung erreicht haben. Es folgt daher

$$R\, v' = R'\, w$$

oder bei gleich grossen Kräften

$$v' = w.$$

Bei dieser Betrachtung ist vorausgesetzt, dass die Auflagerpunkte des Fachwerkes in der Richtung der Auflagerdrücke keine Verschiebung erfahren.

30. Die elastischen Durchbiegungen der Fachwerke.

Mit Hülfe der Elasticitäts-Ellipse eines ganzen Fachwerkes lassen sich verschiedenartige Aufgaben lösen. Hält man das Fachwerk an dem einen Ende fest, so lässt sich die Bewegung des anderen Endpunktes, welche sich unter dem Einflusse einer äussern Kraft einstellt, als eine Drehung um den Antipol der Kraftrichtung auffassen und berechnen. In der Theorie des elastischen Bogens (V. Teil dieses Werkes) gedenken wir von dieser Auffassung Gebrauch zu machen. Auch fachwerkförmige Pfeiler bieten zur Anwendung obiger Gesetze Gelegenheit. Kennt man die Elastitäts-Ellipse und das elastische Gewicht eines solchen Pfeilers, so lässt sich daraus die Verschiebung des oberen Endpunktes mit Leichtigkeit ableiten, gleichviel ob die den Pfeiler belastende Kraft lotrecht, wagrecht oder schief wirkt.

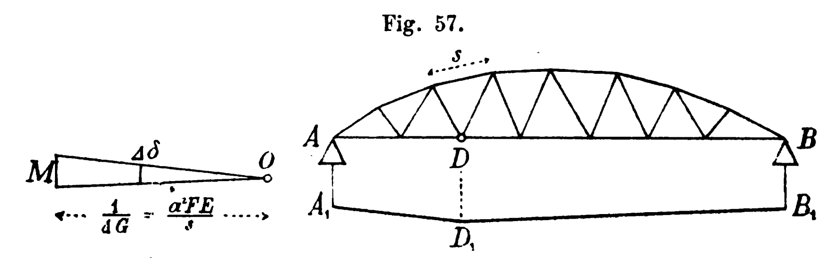
Vorderhand interessiren uns jedoch nur diejenigen Formänderungen der Fachwerke, die man mit dem Namen »Einsenkungen« oder »Durchbiegungen« bezeichnet. Um diese zu bestimmen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Wie oben (S. 115) gezeigt worden ist, entspricht der Verlängerung oder Verkürzung eines einzelnen Fachwerkstabes eine kleine gegenseitige Drehung der beiden Fachwerkshälften, deren Mittelpunkt im Drehpunkte des Stabes liegt und deren Mass

$$\Delta\delta = R.r.\Delta G = M.\Delta G$$

ist, worin ΔG das elastische Gewicht des Stabes und $M = R\,r$ das statische Moment der ausserhalb des Querschnittes angreifenden Kräfte in Bezug auf den Drehpunkt bedeutet. Um diesen Winkel geometrisch zu bestimmen, führt man besser den reciproken Wert von ΔG ein. Man bildet (Figur 57) ein Dreieck, dessen Grundlinie in irgend einem Massstabe gleich M und dessen Höhe gleich $\frac{1}{\Delta G} = \frac{a^2 F E}{s}$ ist. Betrachtet man sodann dieses Dreieck als ein Kräftepolygon und zeichnet ein entsprechendes Seilpolygon $A_1 D_1 B_1$ derart, dass D_1 lotrecht unter dem Drehpunkte des betreffenden Stabes liegt, so stellt die gebrochene Linie die Form dar, in welche eine ursprünglich gerade Linie (beispielsweise der geradlinige Untergurt) infolge der Verkürzung des Stabes s übergeht. Nun ist es nicht schwer, dieses Verfahren auf sämtliche Stäbe auszudehnen. Man gelangt dabei auf ein Seilpolygon mit eben so vielen Kräften oder Ecken, als Stäbe vorhanden sind.

Fig. 57.



Bei dieser Zeichnung sind die Kräfte M streng genommen senkrecht zu den Strahlen aus O aufzutragen. In der praktischen Anwendung des Verfahrens nimmt jedoch die Durchbiegungskurve oder die elastische Linie stets eine sehr flache, von der Geraden nur wenig abweichende Form an; infolge dessen weichen auch die Strahlen des Kräftepolygons nur unbedeutend von der horizontalen Richtung ab, und es ist gestattet, die Kräfte der Einfachheit wegen lotrecht aufzutragen. (Vgl. den I. Teil dieses Werkes, Nr. 35.) Die Regel lautet somit:

Um die Durchbiegungen eines Fachwerkes zu be-

stimmen, belaste man die Drehpunkte der Stäbe mit den entsprechenden Momenten der ausserhalb wirkenden Kräfte und zeichne hiezu, die reciproken Werte der Stabgewichte als Polweiten benützend, ein Seilpolygon.

Da die Werte s, a und F im Allgemeinen von Stab zu Stab sich ändern, so ändert sich auch der Abstand des Poles O; man erhält daher im Allgemeinen ein Kräftepolygon mit veränderlichem Pole.

Die Momente M sind nun in der graphischen Statik bekanntlich der Momentenfläche zu entnehmen. Man hat es daher stets mit zwei Seilpolygonen zu thun. Ist das erste Polygon mit der Polweite H gezeichnet worden und nennt man die Ordinaten der Momentenfläche y, so ist $M = H\,y$. Trägt man, was in der Regel bequemer ist, statt der Momente die Ordinaten y als Kräfte auf, so müssen dem entsprechend die Polweiten des zweiten Kräftepolygons $w = \frac{a^2\,F\,E}{s\,H}$ gemacht werden. Da jedoch diese Werte sehr gross ausfallen, so dividirt man sie durch eine beliebige Zahl $\mathfrak{z}$ und bekommt infolge dessen die Einsenkungen des Fachwerkes in $\mathfrak{z}$-facher Vergrösserung. Nimmt man $\mathfrak{z}$ gleich dem Längenmassstabe der Zeichnung, so erscheinen die Einsenkungen in natürlicher Grösse.

Die Drehpunkte der Streben kommen meistens in grosse Entfernung, bei parallelen Gurtungen sogar ins Unendliche zu liegen; zu gleicher Zeit werden ihre Gewichte ausserordentlich klein oder gar Null, die entsprechenden Polweiten somit sehr gross, beziehungsweise unendlich gross. Wir benützen deshalb das in der vorhergehenden Nummer beschriebene Verfahren zur Vereinigung von je zwei Stäben, und zwar vereinigen wir am besten je eine Strebe mit einem Gurtungsstabe. Diese Vereinigungen sind gestattet, sobald für je zwei vereinigte Stäbe die äussere Kraft die nämliche bleibt, was stets der Fall ist, so lange nur zufällige Lasten in Betracht kommen. Man könnte noch weiter gehen und je 3 oder 4 Stäbe zusammenfassen; doch wird hiemit wenig gewonnen, da das Zeichnen der Elasticitätsellipsen zu umständlich wird.

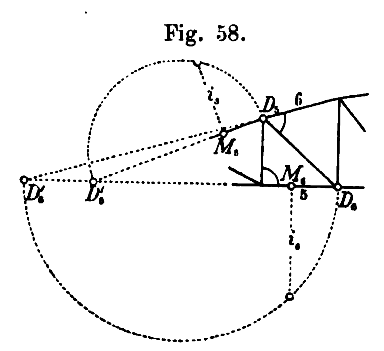
Die Vereinigung zweier Stabgewichte lässt sich leicht durchführen. Offenbar geht die Elaticitätsellipse für zwei belastete Punkte in eine einfache Linie von bestimmter Länge über. Um sie zu zeichnen, bestimmt man den Schwerpunkt M der beiden Stab-

gewichte und errichtet einen Halbkreis über der Verbindungslinie beider Drehpunkte; dieser schneidet auf dem Lote über M die Strecke i ab, welche, nach rechts und links herumgedreht, die Endpunkte der Ellipse angibt. (Vgl. des Verfassers Abhandlung über das Zeichnen von Ellipsen für zwei, drei und mehr belastete Punkte in der Schweizer. Bauzeitung vom 24. August 1889.)

Bei der Bestimmung von Durchbiegungen braucht man die Strecke i nur, um den Antipol der Querkraft zu ermitteln; zu diesem Behufe ist ein Herunterschlagen dieser Strecke überflüssig; man lässt sie in der Stellung, in welcher sie vom Halbkreis abgeschnitten wird, einfach stehen.

Die Figur 58 zeigt, wie die Strecken i für ein Fachwerk mit gekrümmtem Obergurt gezeichnet werden. Der Stab 5 ist dabei mit der vorhergehenden Verticalen, der Stab 6 mit der Diagonalen vereinigt, wie es durch kleine Bögen angedeutet ist. Der Drehpunkt des Gurtstabes 5 liegt in D_5, derjenige des Pfostens in D'_5. In jedem dieser Punkte wirkt ein bestimmtes „Stabgewicht"; M_5 sei der Schwerpunkt dieser Gewichte: dann bestimmt ein Halbkreis über $D_5\ D'_5$ die Länge i_5. Ebenso ist D_6 der Drehpunkt des Stabes 6, D'_6 derjenige der zugewiesenen Strebe; M_6 sei der Schwerpunkt der betreffenden Gewichte; somit ist i_6 die (um 90° gedrehte) Halbaxe der Elasticitätsellipse beider Stäbe. Ein Herumdrehen der Strecken i ist wie schon bemerkt unnötig; sie werden zur Bestimmung der Antipole gerade in derjenigen Lage gebraucht, in der sie sich hier ergeben.

Fig. 58.



Der Gang der Arbeit wird hiernach im Allgemeinen der folgende sein:

Man zeichnet zuerst für die vorgeschriebene Belastung ein Kräfte- und ein Seilpolygon nebst Schlusslinie. Durch letzteres sind die Biegungsmomente für beliebige Stellen des Trägers sowie die Lagen der Querkräfte gegeben. Dann trägt man die Werte a, F und s in eine Tabelle ein, berechnet mit dem Rechenschieber die mit H multiplicirten Gewichte, also die Werte $\frac{s}{a^2}\frac{H}{F\,E}$ und addirt je zwei zusammengehörige derselben. Die reciproken Werte w dieser Summen sind hierauf die Polweiten des zweiten Kräftepolygons. Zugleich bestimmt man für je zwei vereinigte Gewichte den Schwerpunkt und mittelst eines Halbkreises die Strecke i, die Halbaxe der

Elasticitätsellipse. Hierauf trägt man die unter den Schwerpunkten abgegriffenen Momentenordinaten des ersten Seilpolygons als Kräfte auf und zeichnet mit Hülfe dieses Kräftepolygons ein zweites Seilpolygon. Für dieses liegen die Angriffspunkte der Kräfte in den Antipolen der Querkräfte hinsichtlich der Elasticitätsellipsen. Die Seiten des zweiten Seilpolygons schneiden dann auf den Verticalen durch die Knotenpunkte deren Einsenkungen ab.

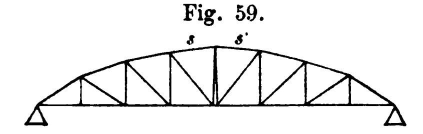
Besitzt das Fachwerk einen (oder auch mehrere) Pfosten, an den sich zwei Diagonalen anschliessen, wie in der Figur 59, so denkt man sich diesen in zwei dicht nebeneinander stehende Pfosten zerlegt und im unteren Streckbaum ein unendlich kleines Stück eingeschaltet. Man vereinigt dann die linke Hälfte des Pfostens mit dem Stabe s, die rechte mit s'. In welchem Verhältnisse man bei der Spaltung des Pfostens den Querschnitt desselben und die am unteren Knoten angreifende Kraft zerlegt, und welche Richtung man dem eingeschalteten Stückchen gibt, ist gleichgültig; nur muss dafür gesorgt werden, dass in den beiden Teilen des Pfostens die gleiche specifische Spannung entsteht.

Enthält das Fachwerk Gegenstreben, so werden die spannungslosen unter denselben ganz ausser Acht gelassen.

Wie die Durchbiegung bei mehrfachem Strebenzuge oder allgemein bei statisch unbestimmten Fachwerken bestimmt wird, soll im nächsten Kapitel gezeigt werden.

Neben den verticalen Bewegungen der Knotenpunkte eines Fachwerkes mögen auch zuweilen die horizontalen Verschiebungen derselben von Interesse sein. Die graphische Bestimmung derselben ist einfach und unterscheidet sich von der Zeichnung der verticalen Einsenkungen nur dadurch, dass man die in den Drehpunkten concentrirt gedachten Momente M statt in verticaler, nun in horizontaler Richtung als Kräfte wirken lässt. Dabei stehen die Seiten des neuen Seilpolygons auf den Strahlen des Kräftepolygons senkrecht.

Fig. 59.

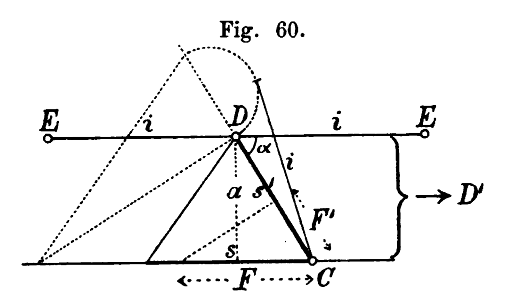


Sind die Streckbäume parallel, so fallen die Drehpunkte der Streben ins Unendliche und ihre Gewichte werden unendlich klein. Vereinigt man das Gewicht eines Gurtungsstabes mit demjenigen einer Strebe, so fällt daher der Schwerpunkt beider mit dem Drehpunkte des Gurtungsstabes zusammen. Die Ellipsenaxe ist aber deshalb nicht gleich null. Sind zum Beispiel die Stäbe s und s' der Figur 60 zu vereinigen und haben die Stabquerschnitte die Flächeninhalte F und F', so ist (unter Weglassung des Elasticitätscoefficienten) $G = \frac{s}{a^2 F}$ und $G' = \frac{s'}{a'^2 F'}$ = unendlich klein.

Bezieht man das Trägheitsmoment beider Gewichte auf die Richtungslinie CD, so ergibt sich $(G + G')(i \cdot \sin \alpha)^2 = G \cdot 0 + G' \cdot a'^2$ und nach Einsetzung obiger Werte

$$i^2 = \frac{s'^3 F}{s F'}.$$

Fig. 60.



Bestimmt man zunächst die Grösse $s_1 = \frac{s' F}{F'}$ und hiernach $s_2 = \frac{s' s_1}{s}$, was (Figur 60) in bekannter Weise je durch ein Paar paralleler Linien geschieht, so ist

$$i = \sqrt{s' s_2}.$$

Indessen gelangt man mittelst des Rechenschiebers rascher und bequemer zum Ziele als durch die Zeichnung.

31. Durchbiegung eines Fachwerkes mit parallelen Gurtungen.

Wie die Durchbiegung eines Parallelträgers gezeichnet wird, möge noch an einem Beispiel gezeigt werden.

Das durch die Figur 61 dargestellte Fachwerk von 18,0 *m* Spannweite und 2,5 *m* Höhe werde durch zwei einander gegenüberstehende fünfachsige Lokomotiven belastet; es soll die Einsenkung der unteren Gurtung bestimmt werden.

Die Querschnitte der einzelnen Fachwerksstäbe sind in der unten folgenden Tabelle angegeben. Die Werte s und F beziehen sich auf Gurtungsstäbe, s' und F' auf die damit verbundenen Streben.

Um die Aufgabe zu lösen, haben wir zunächst die Polweiten des zweiten Kräftepolygons und die Strecken i berechnet. Dabei vereinigten wir mit einem oberen Gurtstabe jeweilen die anstossende Diagonale, mit einem unteren die anstossende Verticale, wie es durch kleine Bögen angedeutet ist. Die Endpfosten 1 und 1' wurden wie die Gurtungsstäbe behandelt; ihre Drehpunkte liegen an den Zusammenstosspunkten der Stäbe 2 und 4, beziehungsweise 2' und 4'. Die Gurtungsstäbe 2 und 2', sowie der Mittelpfosten fallen ausser Betracht, da sie keine Spannung erleiden.

Die Polweiten w wurden nach der Formel $w = \frac{a^2 F E}{s H}$ berechnet (vgl. S. 121), wobei $E = 2000\,t$ und $H = 25\,t$ gesetzt wurde; die Strecke a ist für die Endpfosten gleich 3,0, für alle übrigen Stäbe gleich 2,5 m. Die Strecken i berechneten wir nach der Formel $i^2 = \frac{s'^3 F}{s F'}$ (vgl. S. 124) und zwar mittelst des Rechenschiebers. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in der Tabelle eingeschrieben.

Stab	s	F	s'	F'	a	w	i
	m	cm^2	m	cm^2	m	m	m
1	2,5	98	—	—	3,0	28224	—
2	3,0	70	—	—	2,5	11667	—
3	3,0	92	3,905	75	2,5	15333	4,93
4	3,0	92	2,5	70	2,5	15333	2,62
5	3,0	114	3,905	45	2,5	19000	7,09
6	3,0	114	2,5	70	2,5	19000	2,91
7	3,0	114	3,905	22	2,5	19000	10,14

Nach Erledigung dieser vorbereitenden Arbeit wurde für die gegebenen Radgewichte ein Kräftepolygon mit der Polweite $H = 25\,t$ und ein Seilpolygon $A_1\,B_1$ gezeichnet und zwar wurde der Pol O so gewählt, dass die Schlusslinie wagrecht ausfiel. Hierauf verbanden wir die lotrecht unter den Pfosten liegenden Punkte des Seilpolygons und löschten das ursprüngliche Polygon, sowie das Kräftepolygon, welche jetzt überflüssig geworden waren, wieder aus. Nur der besseren Uebersicht wegen wurde nachträglich noch ein Kräftepolygon mit den einzelnen Knotenlasten gezeichnet.

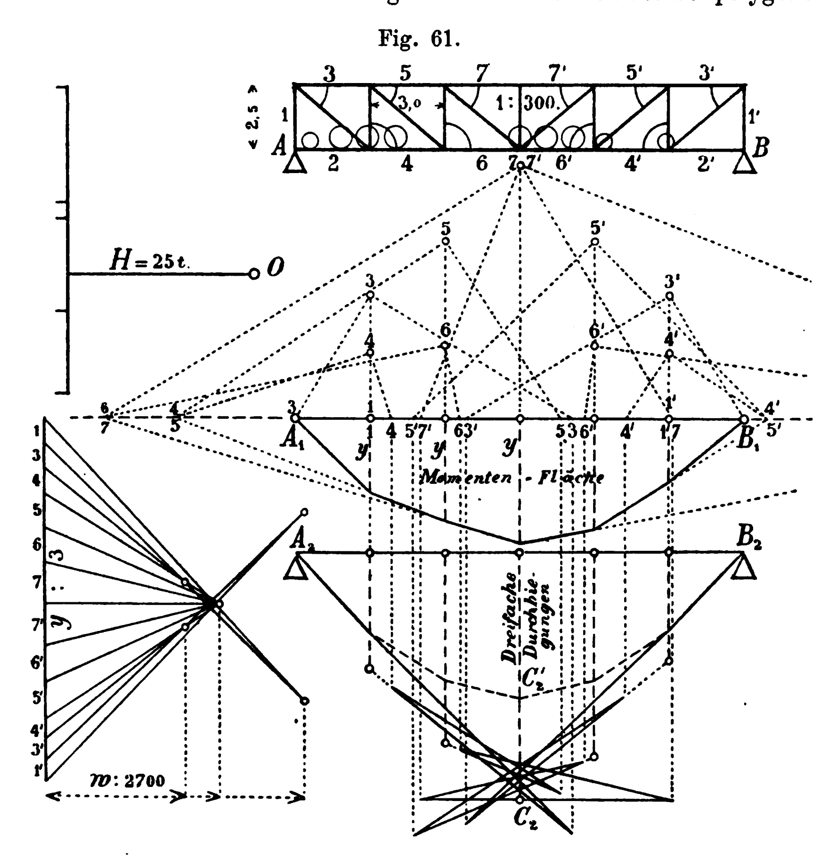
Die Ordinaten y der Momentenfläche, jeweilen unter den Drehpunkten der Gurtstäbe abgegriffen, bildeten sodann das zweite Kräftepolygon. Sie wurden wegen Platzmangel je durch 3 geteilt. Die Pole dieses Polygons haben die Abstände w. Ihrer grossen Länge wegen wurden diese Abstände durch 2700 geteilt. Da der Massstab der Zeichnung 1 : 300 ist, so folgt, dass die Durchbiegungen in $\frac{2700}{3 \cdot 300} = 3$-facher Grösse herauskommen.

Lässt man nun die Kräfte des zweiten Polygons in den Drehpunkten der Gurtungsstäbe angreifen und zeichnet hiernach ein

Seilpolygon, so erhält man den gestrichten Linienzug $A_2\, C'_2\, B_2$; er gibt die Durchbiegungen des Fachwerkes ohne Rücksicht auf die Formänderungen der Streben an. Die grösste Einsenkung in der Mitte ergibt sich hierbei gleich 6,5 *mm*.

Weit grösser wird aber diese Senkung, wenn man die Verlängerung und Verkürzung der Füllungsglieder mit berücksichtigt. Zu diesem Zwecke trägt man von der Schlusslinie $A_1\, B_1$ die Strecken i lotrecht auf und zwar jeweilen unter den Drehpunkten der betreffenden Stäbe. Dann verlängert man die Seiten des Seilpolygons

Fig. 61.



$A_1\, B_1$, bis sie die Schlusslinie schneiden. Die Schnittpunkte lehren uns, wo die Querkräfte liegen. Man verbindet sie mit den Endpunkten der i und zeichnet rechte Winkel; dadurch werden die Antipole der Querkräfte bestimmt. Ihre Nummern sind unterhalb der Schlusslinie beigeschrieben. Verschiebt man nun die

Kräfte von den Drehpunkten nach den Antipolen und zeichnet hierfür wieder ein Seilpolygon, so bekommt man die Durchbiegungen mit Rücksicht auf die Formänderungen der Streben.

Dieses Seilpolygon ist ausgezogen; es ist vielfach verschlungen, lässt sich aber, wenn man genau auf die Zahlen achtet, vollkommen sicher zeichnen.

Die Einsenkungen der einzelnen Knotenpunkte sind durch kleine Ringe angegeben; sie werden durch die Seilpolygonseiten 3 4, 5 6, 7 7′, 6′ 5′ und 4′ 3′ abgeschnitten. Durch die Seiten 4 5, 6 7 etc. erhielte man die Einsenkungen der oberen Gurtung. Die grösste Einsenkung, das heisst der Abstand des Punktes C_2 von $A_2\,B_2$ beträgt, durch drei geteilt, 11,0 *mm*, also 4,5 *mm* mehr als vorhin. An der gesamten Einsenkung beteiligen sich somit die Gurtungen mit 59, die Streben mit 41 %. Freilich wird dieses Verhältnis wesentlich durch die grosse Höhe des Fachwerkes bedingt.

Verglichen mit dem in der Nummer 25 beschriebenen *Williot*'schen Verfahren zum Zeichnen der elastischen Formänderung eines Fachwerkes erscheint der hier beschriebene Weg umständlich. Er besitzt jedoch den Vorteil, dass alle Arbeiten, die sich auf die Abmessungen des Fachwerkes (Stablängen und Querschnitte) beziehen, von vornherein, das heisst unabhängig von der Belastungsart erledigt werden können; ein zweiter Belastungsfall erfordert lediglich eine Aenderung der Seilpolygone. Handelt es sich blos um einen einzigen Belastungsfall, so verdient das *Williot*'sche Verfahren seiner leichteren Uebersicht wegen den Vorzug; sollen dagegen mehrere Belastungsfälle behandelt werden, so dürfte das Verfahren mittelst der elastischen Gewichte schneller zum Ziele führen.

Dieser Weg bietet sodann noch dadurch ein besonderes Interesse, dass er mit demjenigen parallel läuft, welcher bei vollwandigen Balken in der Regel eingeschlagen wird. (Vgl. den I. Teil dieses Werkes, Nr. 35—36). Gerade wie dort die Einsenkungen dadurch bestimmt werden, dass man die Momentenfläche des Balkens als Belastungsfläche ansieht und das Trägheitsmoment des Querschnittes als Poldistanz einführt, so erscheinen auch hier die Ordinaten der Momentenfläche als Kräfte und die Werte $\frac{a^2\,F}{s}$ als Polweiten. Es verursacht hiernach durchaus keine Schwierigkeiten, gelegentlich die Formänderung eines Trägers zu bestimmen, welcher teils vollwandig, teils fachwerkartig gebaut ist.

Dass die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken mittelst der elastischen Gewichte überdies bei der Behandlung continuirlicher Fachwerke (IV. Teil dieses Werkes) wesentliche Dienste leistet, sei hier nur angedeutet.

Viertes Kapitel.

Statisch unbestimmte Fachwerke.

32. Fachwerke mit einem überzähligen Stabe.

Ein vollständig graphisches Verfahren zur statischen Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke besitzen wir zur Zeit nicht; wir sind vielmehr genötigt, diese Aufgabe halb zeichnerisch halb rechnerisch zu lösen. Der Vollständigkeit wegen möge hier auch die rechnerische Seite der Lösung näher erläutert werden.

Ueber die Merkmale zur Unterscheidung der statisch bestimmten und der statisch unbestimmten Fachwerke ist bereits im ersten Kapitel (Nr. 2) alles Nötige gesagt worden. Es sei nur kurz wiederholt, dass ein Fachwerk statisch unbestimmt ist, sobald die Zahl der Auflagerbahnen zusammen mit der Zahl der Stäbe grösser ist als die doppelte Zahl der Knotenpunkte. Auch ist schon dort bemerkt worden, dass die strenge statische Berechnung der unbestimmten Fachwerke nur unter Berücksichtigung der elastischen Formänderungen durchgeführt werden kann. In diesem Kapitel möge nun diese Aufgabe weiter verfolgt werden. Wir behalten dabei hauptsächlich Fachwerkträger mit einer einzigen Oeffnung im Auge und überlassen die Untersuchung von continuirlichen und Bogenfachwerken späteren Teilen dieses Werkes.

Da ein einfacher Träger stets ein festes und ein bewegliches Auflager besitzt, so hat er, um statisch bestimmt zu sein, $2\,k - 3$ Stäbe nötig. Wir betrachten zunächst Fachwerke, welche $2\,k - 2$ Stäbe, also e i n e n überzähligen Stab besitzen.

Soll ein solches Fachwerk statisch berechnet werden, so ist die Zahl der zu bestimmenden Grössen um eins grösser als die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen. Die Lösung auf rein statischem Wege ist daher unbestimmt; man kann eine der Stabkräfte beliebig annehmen und hiernach die übrigen bestimmen, ohne in statischer Hinsicht auf Widersprüche zu stossen. Allein eine solche willkürliche Annahme ist nicht gestattet, sondern es müssen die gesuchten Kräfte derart bestimmt werden, dass die elastischen Verlängerungen

und Verkürzungen der einzelnen Stäbe miteinander im Einklang stehen.

Am einfachsten gestaltet sich die genaue Berechnung der Stabkräfte eines solchen Fachwerkes, wenn man den auf der Seite 108 stehenden Satz von der virtuellen Arbeit benützt.

Man bestimmt zunächst die Stabkräfte nach einem der bekannten Verfahren derart, dass sie mit den äusseren Kräften im Gleichgewichte stehen. Die Kräfte, welche man hierbei erhält, seien S'.

Nun wird stets eine Gruppe von Stäben bestehen, welche derart zusammen hängen, dass, wenn die Kraft in einem von ihnen geändert wird, auch die Kräfte in allen übrigen sich ändern, während die Kräfte in den ausserhalb der Gruppe befindlichen Stäben unverändert bleiben. Diese Gruppe kann nur wenige, sie kann aber auch zahlreiche oder alle Stäbe des Fachwerkes umfassen. Die ausserhalb dieser Gruppe liegenden Stäbe können bei der nachstehenden Betrachtung ausser Acht gelassen werden, sie bleiben von der statischen Unbestimmtheit unberührt und ihre Kräfte lassen sich auf rein statischem Wege finden.

Es vergrössere sich die Kraft in einem der zur Gruppe gehörenden Stäbe um einen bestimmten Wert; dann lassen sich vermittelst eines Kräfteplanes die Vergrösserungen der übrigen Stabkräfte bestimmen. Nennen wir diese Vergrösserungen K, so werden die Stabkräfte jetzt gleich $S' + K$ sein. Nach wie vor besteht aber Gleichgewicht zwischen äusseren und inneren Kräften. Die Kräfte K kann man auch mit einem beliebigen constanten Faktor multipliciren und zu den Kräften S' addiren, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird. Es ist somit klar, dass die Stabkräfte $S' + \alpha K$ für beliebige Werte von α mit den gegebenen äusseren Kräften im Gleichgewichte stehen. Es handelt sich jetzt nur darum, den Faktor α derart zu bestimmen, dass er den Bedingungen der elastischen Formänderungen entspricht.

Bezeichnet man wie früher mit s die Stablänge, mit F den Flächeninhalt des Stabquerschnittes und mit E den Elasticitätsmodul, so wird die Verlängerung der Stäbe ausgedrückt durch

$$\Delta s = \frac{(S' + \alpha K)\, s}{F E}.$$

Die Kräfte K bilden zusammen ein System, das sich ohne Hinzutreten von äusseren Kräften im Gleichgewichte hält. Nach

dem oben angeführten Satze von der virtuellen Arbeit besteht also die Beziehung

$$\Sigma (K \,.\, \varDelta s) = 0,$$

woraus sich, wenn man für $\varDelta s$ obigen Wert einführt,

$$\alpha = - \frac{\Sigma \left(\frac{K\, S'\, s}{F\, E}\right)}{\Sigma \left(\frac{K^2\, s}{F\, E}\right)}$$

ergibt.

Im Allgemeinen hat man nun zur Lösung der vorstehenden Aufgabe zwei Kräftepläne zu zeichnen. Der eine bestimmt im Anschluss an die gegebenen Belastungen die Kräfte S'; durch den anderen werden unabhängig von den äusseren Belastungen die Kräfte K bestimmt, wobei die erste dieser Kräfte beliebig angenommen wird. Wir wollen die letztere Zeichnung in Zukunft das »Kräftediagramm« nennen.

Es ist zu beachten, dass sowohl die S' als auch die K bald Zug- bald Druckkräfte sind; letztere müssen stets mit dem negativen Zeichen eingeführt werden.

Ist die Grösse des Faktors α nach obiger Gleichung bestimmt, so berechnet man die endgültigen Stabkräfte nach der Formel

$$S = S' + \alpha\, K.$$

Oder man berechnet auf diese Weise blos eine einzige Kraft und zeichnet, von dieser ausgehend, einen zweiten Kräfteplan, der nun die richtigen Stabkräfte liefert.

Man erkennt leicht, dass die genaue Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke die Kenntnis der Stabquerschnitte voraussetzt. Man wird daher, wenn es sich um einen neuen Entwurf handelt, im Allgemeinen eine angenäherte Berechnung vorausschicken und hernach die gewählten Querschnitte je nach dem Ausfall der genauen Rechnung abändern.

Wenn verschiedene Belastungsfälle zu behandeln sind, so erleichtert man sich die Arbeit durch Einführung der stets positiven Grösse

$$k = \frac{K^2\, s}{F\, E},$$

welche für jeden Stab ein für allemal berechnet wird; denn jetzt wird einfacher

$$\alpha = - \frac{\Sigma \left(\frac{S'}{K}\, k\right)}{\Sigma\, (k)}.$$

Was die Berechnung von α betrifft, so bedient man sich in der Regel der Zahlenrechnung, wobei es zweckmässig ist, alle vorkommenden Werte in einer Tabelle aufzuschreiben. Mit Vorteil wird man bei diesen Rechnungen den Rechenschieber verwenden. Den Elasticitätscoefficienten lässt man, wenn nicht etwa verschiedenartiges Material zur Verwendung kommt, von vornherein fallen.

Man kann bei der Lösung der vorstehenden Aufgabe auch so vorgehen, dass man das Fachwerk zuerst durch Wegnahme eines Stabes statisch bestimmt macht und die Stabkräfte ermittelt, welche die gegebene Belastung in diesem Falle hervorruft. Führt man jetzt die Rechnung in der nämlichen Weise wie oben durch, so ändert sich nichts weiter, als dass eine der Kräfte S' gleich null wird und das entsprechende Glied in dem Ausdrucke für α wegfällt. Das schliessliche Ergebnis muss aber dasselbe sein. Offenbar ist der zuerst beschriebene Weg der allgemeinere; der spezielle Weg kann jedoch zuweilen bequemer sein. (Vgl. das Beispiel in Nr. 34.)

Bei all diesen Berechnungen führt man für F die volle Querschnittsfläche der Stäbe ein und berücksichtigt die Nietlöcher erst dann, wenn es sich um die Bestimmung der endgültigen spezifischen Spannungen handelt. Die Nietlöcher schon vorher dadurch zu berücksichtigen, dass man das Volumen des gelochten Stabes durch seine Länge dividirt und den Quotienten als Querschnitt einführt, halten wir für eine ungerechtfertigte Erschwerung; da sich stets ein Teil der Spannung vermittelst der Reibung durch die fest anliegenden Nietköpfe überträgt, so kommt man der Wahrheit näher, wenn man den vollen Querschnitt in die Rechnung einführt.

33. Eigenspannungen und Temperaturspannungen.

In den bisherigen Betrachtungen ist vorausgesetzt worden, dass die Stäbe des Fachwerkes spannungslos seien, sobald auf dasselbe keine äusseren Kräfte einwirken. Diese Annahme trifft jedoch nur zu, wenn die Stäbe in ihrer richtigen Länge, das heisst ohne künstliche Anspannung oder Verkürzung aneinander gefügt werden und so lange die Stablängen nicht durch Temperatureinflüsse Aenderungen erleiden. Künstlich erzeugte Spannungen kommen bei Fachwerken nicht selten vor; bald werden sie absichtlich hervorgerufen, bald sind sie eine Folge ungenauer Abmessungen. Auch eine ungleiche Erwärmung der einzelnen Stäbe ist oft unvermeidlich. In beiden Fällen entstehen bei den statisch unbestimmten Fachwerken innere Stabkräfte, ohne dass äussere Kräfte vorhanden sind, während statisch bestimmte Fachwerke von diesen Einflüssen frei bleiben. (Vgl. S. 6).

Wir nehmen an, es sei der Stab n bei der Herstellung des

Fachwerkes um Δs_n zu lang gewesen, oder was auf das Nämliche hinausläuft, der Stab n habe infolge einer Erwärmung das Bestreben, sich um Δs_n zu verlängern. Alle übrigen Stäbe sollen ihre richtige Länge besitzen, und auch ihre Temperatur soll unverändert bleiben. Dann entstehen in den Stäben des Fachwerkes Kräfte, welche, da sie von den äusseren Belastungen unabhängig sind, sich gegenseitig das Gleichgewicht halten. Diese Kräfte müssen daher Vielfache der Diagrammkräfte sein; wir bezeichnen sie wie früher mit αK.

Jeder Stab verlängert sich nun um die Strecke $\Delta s = \frac{\alpha K s}{F E}$, der n^{te} Stab aber ausserdem noch um Δs_n. Führt man diese Werte in die Gleichung $\Sigma (K . \Delta s) = 0$ ein, so ergibt sich der unbekannte Faktor

$$\alpha = - \frac{K_n . \Delta s_n}{\Sigma (k)},$$

wenn wie früher zur Abkürzung

$$\frac{K^2 s}{F E} = k$$

gesetzt wird. Ist der Faktor α bekannt, so findet man durch Multipliciren desselben mit den verschiedenen K leicht die Stabkräfte selbst.

Besitzen mehrere oder gar sämtliche Stäbe zu grosse Längen oder erhöhte Temperatur, so ist für jeden dieser Stäbe das Produkt $K . \Delta s$ zu bilden und die Summe dieser Produkte in obigen Ausdruck für α einzusetzen.

Ist ein Stab nicht zu lang, sondern zu kurz hergestellt worden, oder hat sich seine Temperatur verringert, so ist der betreffende Längenunterschied mit negativem Zeichen einzuführen.

34. Beispiel.

Zur Erläuterung des in den vorigen Nummern Gesagten möge der durch die Figur 62 dargestellte Dachstuhl berechnet werden.

Das im Massstabe 1 : 250 gezeichnete Gebilde besitzt 12 Knotenpunkte und 22 Stäbe, also einen überschüssigen Stab.

Wir zeichnen zunächst den *Cremona*'schen Kräfteplan der Figur 63 und zwar unter der Annahme, dass das Horizontalband 1 1' fehle. Der symmetrischen Belastung wegen ist es gestattet, diesen Plan blos zur Hälfte zu zeichnen. Eine Erklärung desselben ist wohl überflüssig. Zugkräfte sind

dünn, Druckkräfte etwas dicker ausgezogen. Der Massstab der Kräfte ist 1 *mm* = 0,4 *t*.

In zweiter Linie zeichnen wir das Diagramm der Figur 64. Ausgehend von der beliebig angenommenen Zugkraft 1 1′ bestimmen wir zunächst die Kräfte in den Stäben 1 4 und 1 7, hierauf 4 7 und 4 4′. Man erkennt bei dieser Arbeit, dass die Kraft *K* für eine ganze Reihe von Stäben (2 6, 3 6, 3 7, 4 5 und die dazu symmetrischen) gleich null wird. Diese Stäbe liegen demnach ausserhalb der Gruppe, welche von der Unbestimmtheit beeinflusst

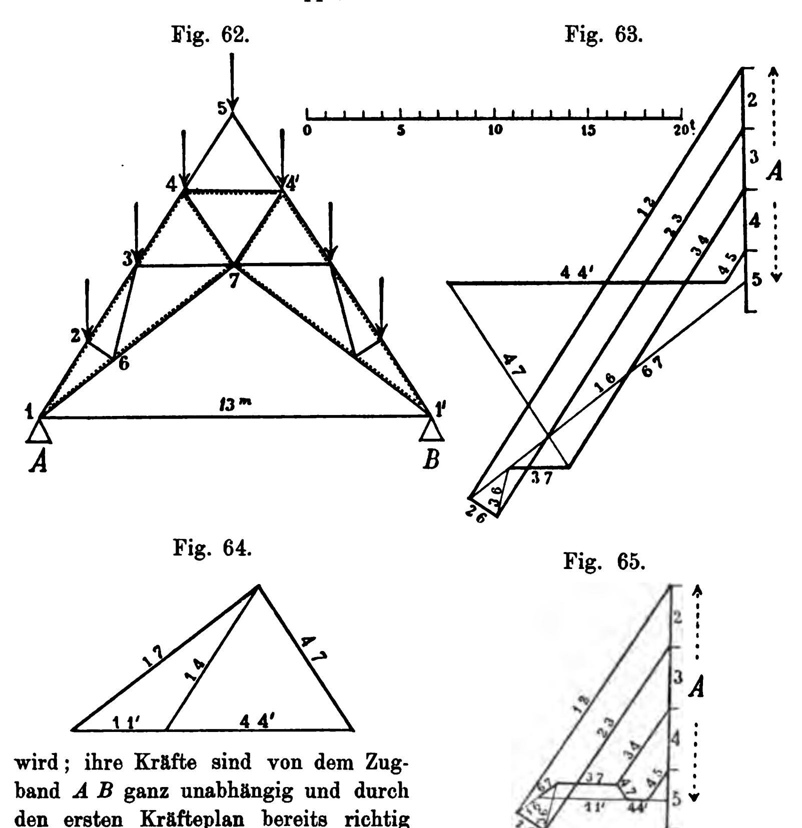


Fig. 62.

Fig. 63.

Fig. 64.

Fig. 65.

wird; ihre Kräfte sind von dem Zugband *A B* ganz unabhängig und durch den ersten Kräfteplan bereits richtig ermittelt.

Nun wird die umstehende Tabelle entworfen. Sie enthält die Stablängen s und die Querschnitte F, hierauf die durch die Figuren 63 und 64 ermittelten Kräfte S' und K; dann folgen die mittelst des Rechenschiebers berechneten Produkte $\frac{K S' s}{F}$ und $\frac{K^2 s}{F}$. Diese letzteren Zahlenreihen werden addirt, worauf sich

$$a = - \frac{-127{,}9}{93{,}8} = + 1{,}36$$

ergibt. Mit dieser Zahl werden hierauf sämtliche K multiplicirt und die Produkte

Stab	s	F	S'	K	$\frac{K S' s}{F}$	$\frac{K^2 s}{F}$	$a K$	S
	m	cm^2	t	t			t	t
(1/2) 1 1′	6,50	26	0	+ 5,0	0	6,2	+ 6,8	+ 6,8
1 2	2,98	35	— 27,2	+ 9,2	— 21,3	7,2	+ 12,6	— 14,6
2 3	2,98	35	— 24,5	+ 9,2	— 19,2	7,2	+ 12,6	— 11,9
3 4	2,98	35	— 17,5	+ 9,2	— 13,7	7,2	+ 12,6	— 4,9
4 5	2,98	35	— 2,0	0	0	0	0	— 2,0
1 6	3,16	26	+ 18,7	— 12,7	— 28,8	19,6	— 17,3	+ 1,4
6 7	5,04	26	+ 16,0	— 12,7	— 24,7	31,3	— 17,3	— 1,3
2 6	1,05	13	— 1,8	0	0	0	0	— 1,8
3 6	3,16	13	+ 2,7	0	0	0	0	+ 2,7
3 7	3,25	26	— 3,2	0	0	0	0	— 3,2
4 7	2,98	26	+ 11,6	— 9,2	— 12,2	9,7	— 12,6	— 1,0
(1/2) 4 4′	1,625	30	— 14,8	+ 10,0	— 8,0	5,4	+ 13,6	— 1,2
					— 127,9	93,8		

zu den Kräften S' hinzugefügt, wodurch man die richtigen Kräfte S erhält.

Der Symmetrie wegen sind nur die linksseitigen Stäbe aufgeschrieben; für die Stäbe 1 1′ und 4 4′ wurde infolgedessen nur die halbe Länge in Rechnung gezogen.

Man sieht, dass einzelne Kräfte infolge des unteren Zugbandes ganz bedeutende Aenderungen erfahren; der Dachstuhl geht gewissermassen in einen fachwerkförmigen Bogen (oder ein Sprengwerk) mit Horizontalverspannung über.

Was den Einfluss des Winddruckes betrifft, so lässt sich dieser ganz auf dieselbe Weise finden. Der Kräfteplan (mit Weglassung des Zugbandes) muss hier selbstverständlich für den ganzen Stuhl gezeichnet werden, bietet aber durchaus keine Schwierigkeiten. (Vgl. S. 90 u. ff.) Das Diagramm bleibt unverändert, auch der Gang der Rechnung ist der nämliche wie oben. —

Der vorstehend berechnete Dachstuhl fand vor einigen Jahren für das Münster in Basel Verwendung. Das Zugband $A B$ wurde einerseits der Materialersparnis wegen angebracht; andrerseits diente es zur Bildung eines Arbeitssteges, der der ganzen Länge nach durchläuft.

Beim Entwurfe des Bauwerkes wurde unter Anderem die Frage erörtert, welchen Einfluss es hätte, wenn man den Zuganker wegliesse und dafür den Dachstuhl an beiden Auflagern festschraubte. Die Antwort hierauf wird dadurch gefunden, dass man in obiger Rechnung die Ausdehnung des Zugankers gleich null setzt, wozu man einfach seinen Querschnitt unendlich gross anzunehmen braucht. In der Tabelle verschwindet dann die Zahl 6,2 und es findet sich

$$a = - \frac{-127,9}{87,6} = + 1,46.$$

Die Stabkräfte ändern sich infolgedessen gegenüber der ersten Rechnung nur wenig; dagegen erfährt das Mauerwerk einen horizontalen Schub von

$$a\, K_{1 \cdot 1} = 7,3 \text{ Tonnen.}$$

Ausserdem wird bei festgeschraubten Auflagern auch der Einfluss des Temperaturwechsels zu berücksichtigen sein. Hierüber lässt sich ebenfalls leicht Aufschluss geben.

Infolge einer Temperaturzunahme von 25° würde sich bei beweglichem Auflager die Entfernung AB um $\Delta l = 25 \cdot 0{,}000012 \cdot 13 = 0{,}0039\ m$ vergrössern. Wird diese Vergrösserung durch Festschrauben der Endpunkte verhindert, so ist das gleichbedeutend mit einer Verkürzung des Zugbandes um Δl. Es entstehen daher in den Stäben des Fachwerkes Kräfte gleich $\alpha_t K$, wobei (vgl. S. 132)

$$\alpha_t = E \frac{K_{1 \cdot 1} \Delta l}{\Sigma \left(\frac{K^2 s}{F} \right)}$$

ist. Setzt man hierin $K_{1 \cdot 1} = 5{,}0$, $E = 2000\ t$ pro cm^2, $\Delta l = 0{,}0039\ m$ und den Summenausdruck, da jetzt sämtliche Stäbe des Dachstuhls berücksichtigt werden müssen, gleich $2 \cdot 87{,}6, = 175{,}2$, so findet sich

$$\alpha_t = 0{,}22.$$

Multiplicirt man nun die Kräfte des Diagrammes mit α_t, so ergeben sich die gesuchten Stabspannungen. In der Regel führt man diese Spannungen, Herstellung bei mittlerer Temperatur voraussetzend, sowohl positiv als negativ in Rechnung. Der horizontale Schub, den der Dachstuhl infolge der Temperaturänderung auf die Mauern ausübt, wird $H = \alpha_t K_{1 \cdot 1} = 1{,}1\ t$.

Bei der Ausführung des fraglichen Dachstuhles behielt man das Zugband bei und legte die Endpunkte auf Gleitlager.

35. Fachwerke mit mehreren überzähligen Stäben.

Die Gesetze des Gleichgewichtes gestatten bei einem einfachen Fachwerkträger stets nur die Bestimmung von $2k—3$ inneren Kräften; für jeden weiteren Stab müssen die Gesetze der Elasticität Hülfe bringen; bei n überzähligen Stäben haben wir aus diesen Gesetzen n weitere Bedingungen abzuleiten, um die inneren Kräfte eindeutig ermitteln zu können.

Die genaue Lösung dieser Aufgabe ist in der Nummer 32 bereits der Hauptsache nach erklärt worden. Es handelt sich hier blos darum, den beschriebenen Weg mehrfach einzuschlagen.

Im Allgemeinen wird man folgendermassen vorgehen.

Man scheidet zunächst so viele Stäbe aus, als nötig ist, um das Fachwerk statisch bestimmt zu machen, wobei man gewöhnlich zwischen verschiedenen Stäben die Wahl hat. Selbstverständlich darf das Fachwerk hierdurch nicht unstabil werden. Dann zeichnet man für jeden dieser Stäbe ein Kräftediagramm, wobei man in jedem Diagramme eine der Kräfte beliebig annimmt und

daraus die übrigen Kräfte bestimmt, so weit bis das Diagramm sich schliesst. Es kann dabei vorkommen, dass sich ein einzelnes Diagramm über sämtliche Stäbe des statisch bestimmten Fachwerkes erstreckt; in andern Fällen wird es sich auf einen Teil derselben beschränken.

Nun zeichnet man für die gegebene Belastung einen Kräfteplan, wobei es gleichgültig ist, ob man für sämtliche Stäbe des ursprünglichen Fachwerkes oder nur für die übrig gelassenen Stäbe Kräfte ermittelt. Bald kann das Eine, bald das Andere vorteilhafter sein; es handelt sich nur darum, Stabkräfte zu suchen, welche mit den äusseren Kräften ein Gleichgewichtssystem bilden. Wir nennen diese Kräfte wie früher S'.

Multiplicirt man nun die Kräfte eines der Diagramme mit einem beliebigen Faktor und fügt die Produkte zu den Kräften S' hinzu, so bleibt das Gleichgewicht zwischen äusseren und inneren Kräften bestehen; denn die Kräfte eines Diagrammes halten sich stets gegenseitig im Gleichgewicht. Ebenso kann man die Kräfte der übrigen Diagramme, mit Faktoren multiplicirt, zu den Kräften S' addiren.

Bezeichnet man die Kräfte der verschiedenen Diagramme mit K', K'', K''' . . . ., so ergeben sich auf diese Weise Stabkräfte

$$S = S' + \alpha' K' + \alpha'' K'' + \alpha''' K''' + \ldots,$$

welche mit den äusseren Kräften im Gleichgewicht stehen.

Die Faktoren α' α'' α''' . . . werden nun wiederum mit Hülfe des Satzes von den virtuellen Verschiebungen bestimmt. Für jedes Diagramm wird nämlich eine Gleichung von der Form

$$\Sigma(K . \Delta s) = \Sigma\left(\frac{K S s}{F E}\right) = 0$$

aufgestellt. Dadurch ergeben sich ebenso viele Gleichungen, als überzählige Stäbe vorhanden sind. Diese Gleichungen gestatten daher, die Werte der unbestimmten Faktoren α eindeutig zu berechnen. Ist dies geschehen, so findet man die wirklichen Stabkräfte S mit Hülfe der oben angeschriebenen Gleichung.

Aehnlich ist vorzugehen, wenn der Einfluss unrichtiger Stablängen oder die Wirkung ungleicher Erwärmung berücksichtigt werden soll.

36. Fachwerke mit mehrteiligen Streben.

Unter den statisch unbestimmten Fachwerken sind für den Brückenbauer diejenigen mit mehrfachen oder mehrteiligen Streben die wichtigsten. Es ist notwendig, diesen besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Dabei betrachten wir hauptsächlich die Fachwerke mit zweiteiliger Strebenanordnung, bei welchen zwei von einem Auflager zum andern durchlaufende Strebenzüge zu unterscheiden sind, bei denen mit andern Worten jede Strebe durch die andern einmal gekreuzt wird.

Es sei gleich anfangs bemerkt, dass wir bei der nachfolgenden Besprechung stets Streben im Auge haben, die den in ihnen auftretenden Kräften Widerstand leisten können. Schlaffe, sich kreuzende Diagonalen betrachten wir als Haupt- und Gegenstreben (vgl. Nr. 10); ein damit ausgestattetes Fachwerk wird, solange die Streben sich nur einmal kreuzen, als ein statisch bestimmtes behandelt.

Die strenge Berechnung der mit mehrfachem Strebenzug versehenen Fachwerke ist trotz allem Scharfsinn, den man aufwenden mag, eine umständliche Arbeit, so dass der Praktiker sich in der Regel mit einer angenäherten Bestimmung der Stabkräfte begnügt. Man denkt sich zu diesem Zwecke das n-teilige Fachwerk in n einteilige, also statisch bestimmte Fachwerke zerlegt und überträgt jedem von diesen den n^{ten} Teil der gesamten Belastung. Zunächst soll dieses angenäherte Verfahren näher beschrieben werden.

a) Fachwerke mit Pfosten und gekreuzten Streben.

Man zerlegt das zweiteilige Fachwerk mit gekreuzten Streben derart in zwei einteilige, dass das eine die nach rechts, das andre die nach links fallenden Diagonalen enthält, während die Gurtungen und Pfosten beiden angehören.

Zuerst möge gezeigt werden, wie nach obiger Regel der *Cremona'*sche Kräfteplan eines Fachwerkes mit Pfosten und zweifachem Strebenzuge aussieht.

Es sei das durch die Figur 66 dargestellte Fachwerk zu be-

rechnen und zwar vorerst blos mit einem einzigen überflüssigen Stabe (9). Lässt man auch diesen noch fallen, so ist das Fachwerk statisch bestimmt und der Kräfteplan kann nach bekannten Regeln gezeichnet werden. (Fig. 67).

Wird im zweiten Fache die Strebe 8 durch die sie kreuzende Strebe 9 ersetzt, so tritt auch im Kräfteplane an Stelle der Kraft 8 die Kraft 9. Zugleich ändern sich die Kräfte 6, 7, 10 und 11, während alle übrigen sich gleich bleiben, und zwar werden die Kräfte 10 und 11 grösser, die Kräfte 6 und 7 kleiner. Die Stabkraft 10, welche früher bis *L* ging, endigt jetzt in *O*; die Kraft 7, welche früher bis *M* reichte, wird jetzt durch den Punkt *N* begrenzt; der Endpunkt von 6 hat sich von *L* nach *N*, derjenige von 11 von *M* nach *O* verschoben.

Fig. 66.

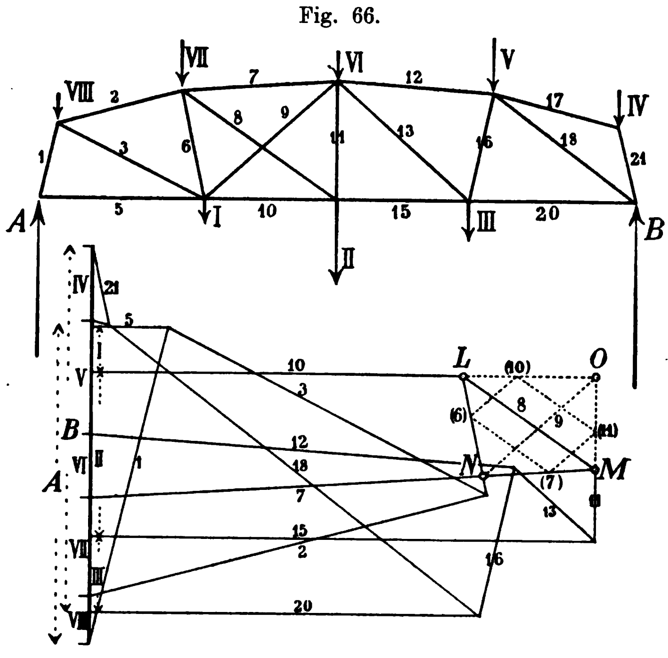


Fig. 67.

Wenn aber beide Diagonalen, 8 sowohl als 9, vorhanden sind, so werden sie sich in die Arbeit teilen; zugleich nehmen die 4 übrigen Kräfte des Faches Werte an, welche **zwischen** den soeben besprochenen Werten liegen.

Kennt man den genauen Wert einer dieser Kräfte, so sind da-

mit auch die übrigen bestimmt. Ist beispielsweise bekannt dass, die Kraft 7 im Punkte (7) endigt, so zeichne man in das Viereck $L\,M\,N\,O$ das Parallelogramm (7) (6) (10) (11) ein; dann begrenzt der Punkt (10) die Kraft 10, (6) die Kraft 6 und (11) die Kraft 11, während die Strebenkraft 8 durch die Strecke (6) (7) oder (10) (11), die Kraft 9 durch (7) (11) oder (6) (10) dargestellt wird. Man erkennt dies Alles, wenn man die an jedem Endpunkte des fraglichen Faches zusammenstossenden Kräfte zu einem geschlossenen Polygone vereinigt.

Man sieht, dass den Bedingungen des Gleichgewichtes auf unendlich vielfache Weise genügt werden kann, wenn die beiden sich kreuzenden Streben zu gleicher Zeit vorhanden sind. Unter den unendlich vielen Lösungen der Aufgabe ist nun zwar nur diejenige die richtige, welche den elastischen Formänderungen oder (nach Nr. 32, S. 130) der Bedingung $\Sigma\,(K\,.\,\Delta\,s) = 0$ entspricht. Wie schon bemerkt, erlaubt man sich jedoch gewöhnlich die Annahme, dass jede Strebe die Hälfte derjenigen Spannung übernehme, welche ihr zukäme, wenn sie ohne ihre Gefährtin arbeiten müsste. Dann aber hat man, um die Grösse der sechs Kräfte zu finden, die Seiten des Viereckes $L\,M\,N\,O$ einfach zu halbiren.

Von dieser Annahme ausgehend ist in der Figur 69 der Kräfteplan eines Fachwerkes gezeichnet worden, das in sämtlichen Fächern Kreuzstreben besitzt. Man geht am besten so vor, dass man jeweilen erst die eine und dann die andere Strebe als vorhanden annimmt und hierauf die sich ergebenden Unterschiede halbirt. Eine weitere Beschreibung der Zeichnung dürfte kaum nötig sein.

Die in den Streben wirkenden Kräfte treten in diesem Plane je zweimal auf, eine kleine Unbequemlichkeit, die sich jedoch bei statisch unbestimmten Fachwerken nicht vermeiden lässt.

Auf Druck beanspruchte Stäbe sind in der Figur 68 durch doppelte Linien hervorgehoben. —

Der hiermit geschilderte Weg zur Berechnung der Stabkräfte eignet sich besonders dann, wenn der Einfluss des Eigengewichtes bestimmt werden soll. Bei gleichmässig verteilter zufälliger Last können auch die grössten Gurtungskräfte auf diese Weise gefunden werden. Zur Bestimmung der grössten und kleinsten Strebenkräfte, sowie zur Auffindung der grössten Gurtungskräfte bei unregelmässiger Verkehrslast wendet man dagegen besser das

Schnittverfahren (Nr. 4) oder das Momentenverfahren (Nr. 6) an.

Im Einzelnen ist hierüber wenig mehr zu sagen.

Um die grösste Spannung eines Gurtungsstabes zu erhalten, denkt man sich im betreffenden Fache zuerst die eine und dann die andere Diagonale wirksam, ermittelt nach den für statisch bestimmte Fachwerke gültigen Regeln die Kräfte, die in dem einen und in dem anderen Falle in der Gurtung entstehen können und nimmt von beiden Werten das arithmetische Mittel. Man kann

Fig. 68.

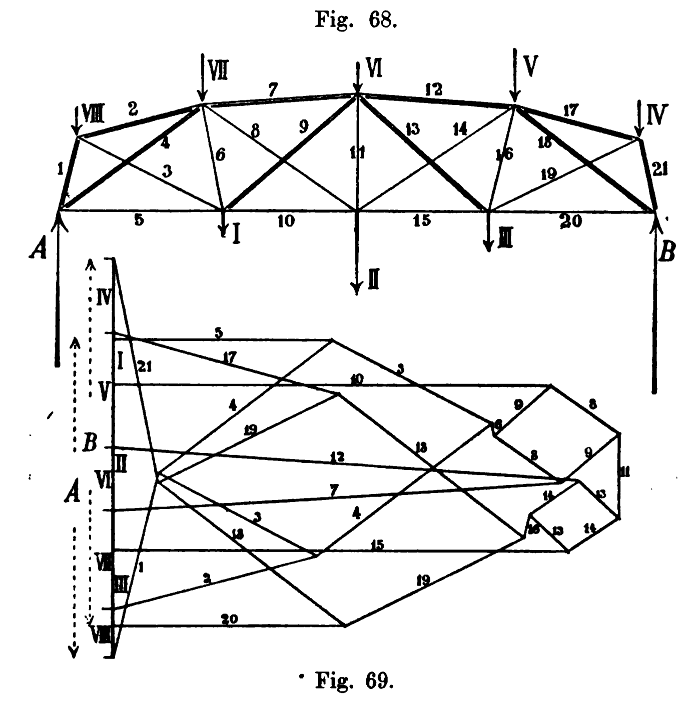


Fig. 69.

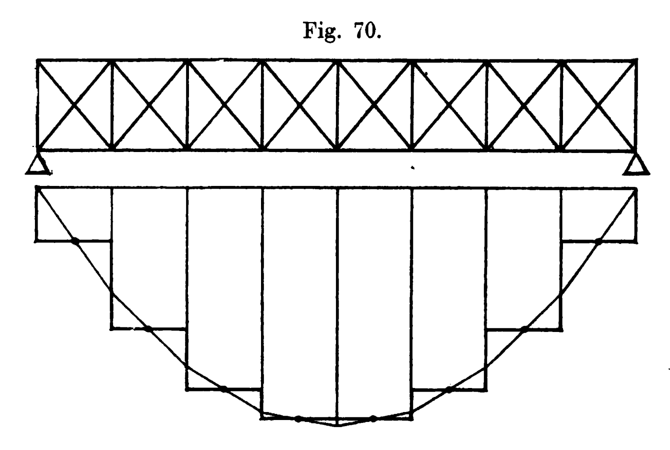
dabei wie beim einteiligen Fachwerke, Staffellinien zeichnen, welche den Wechsel der Kraft übersichtlich darstellen.

Die Figur 70 enthält die betreffende Zeichnung für einen Parallelträger. Eine nähere Erläuterung derselben ist kaum erforderlich. Die wagrechten Striche der Staffellinie kreuzen das Momentenpolygon je in der Mitte des Faches. Beide Gurtungen sind gleich stark beansprucht, sodass ein Plan für beide genügt. Bei gekrümmter Gurtung sind dagegen zwei Pläne zu zeichnen.

Besteht die zufällige Belastung aus einer Reihe von Einzel-

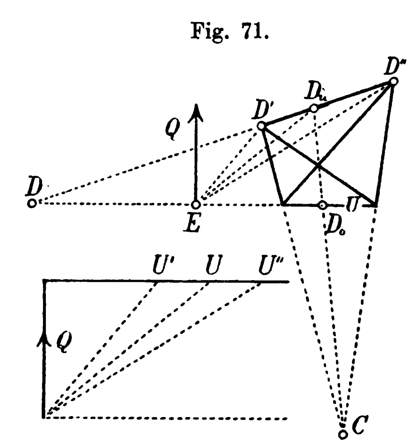
lasten, so ist die ungünstigste Laststellung im Allgemeinen nicht für beide Fälle die nämliche. Doch ist der Fehler, den man begeht, wenn man für jeden der zwei fraglichen Knotenpunkte das grösstmögliche Moment einführt, geringfügig und darf um so eher vernachlässigt werden, als die Gurtungskraft etwas grösser herauskommt als bei genauerem Vorgehen.

Fig. 70.



Man kann die Gurtungskräfte übrigens auch direkt durch einmalige Berechnung finden. Soll (Fig. 71) die Kraft U gefunden werden, welche die Querkraft Q im unteren Streckbaum erzeugt, so verlängere man die beiden Pfosten bis zu ihrem Schnittpunkte C, verbinde diesen Punkt mit dem Kreuzungspunkte beider Streben und bestimme hierdurch auf dem oberen Gurtstabe den Punkt D_u. Betrachtet man jetzt D_u als Drehpunkt des unteren Gurtstabes, so erhält man genau denselben Wert für U, als wenn man zunächst D' und dann D'' als Drehpunkt angesehen und von den beiden Stabkräften das Mittel genommen hätte.

Fig. 71.



Die vier Punkte D, D', D_u, D'' bilden nämlich eine harmonische Reihe. Betrachtet man diese Punkte einen nach dem andern als Drehpunkte des unteren Gurtstabes und verbindet sie mit E, so erhält man vier harmonische Strahlen. Zerlegt man nun (Fig. 71) Q nach diesen Strahlen und nach der Richtung des untern Streckbaums, so liegen die Endpunkte der Kräfte U wieder harmonisch. Der eine dieser

Endpunkte fällt aber ins Unendliche; folglich halbirt der ihm zugeordnete die Entfernung der beiden übrigen.

Um die Kraft im oberen Gurtstabe zu erhalten, hat man selbstverständlich D_o als Drehpunkt anzusehen.

Bei den in der Praxis vorkommenden Fachwerken stehen die beiden Pfosten wohl immer lotrecht. Dann fällt C ins Unendliche und die Punkte D_u und D_o werden dadurch gefunden, dass man durch den Kreuzungspunkt der Streben eine Verticale zieht.

Laufen die Streckbäume überdies parallel, so fallen die beiden Punkte je in die Mitte des Faches.

Auch die schiefen Streben berechnet man derart, dass man von zwei sich kreuzenden Stäben zuerst den einen und dann den andern als vorhanden ansieht, und zwar ebenso wohl bei geraden wie bei gekrümmten Gurtungen. Die ungünstigste Belastung ist, wie man leicht erkennt, für die zwei Streben eines Faches je dieselbe. Die Arbeit wird infolge dessen wesentlich abgekürzt. Von den Kräften, die man auf diese Weise für die schiefen Streben erhält, ist je die Hälfte zu nehmen, vorausgesetzt, dass man die ganze zufällige Belastung zu Grunde gelegt hat.

Für die Pfosten endlich erhält man Zug- oder Druckkräfte, je nachdem man die fallenden oder die steigenden Diagonalen als wirksam ansieht. Die zwei Kräfte, die man bekommt, heben sich somit zum grossen Teil auf. In der That erfahren die Pfosten der mehrteiligen Fachwerke nur ganz geringe Beanspruchungen; sie haben gewissermassen nichts anderes zu thun, als die auf die Knoten der Fahrbahnseite entfallenden Lasten zum Teil auf die anderen Knoten zu übertragen. Sie sind gezogen oder gedrückt, je nachdem die Fahrbahn unten oder oben liegt. Ihre Berechnung kann aus diesem Grunde meistens unterbleiben; denn sie erhalten in der Regel aus anderen Ursachen weit grössere Querschnitte, als die in ihnen wirkenden Kräfte erfordern würden.

Eine Ausnahme hiervon bilden selbstverständlich die Endpfosten. Diese haben die Hälfte derjenigen Kraft aufzunehmen, welche einträte, wenn blos die nach der Mitte fallende Strebe vorhanden wäre.

Fachwerke mit vierfachem Strebenzuge (Fig. 72) lassen sich in der Hauptsache nach denselben Regeln wie die zweiteiligen behandeln. Immerhin dürfte es kaum zweckmässig sein, für ein solches Bauwerk einen einzigen *Cremona*'schen Kräfteplan zu zeichnen. Man thut besser, das Fachwerk in zwei zweiteilige zu zerlegen und dem entsprechend zwei getrennte Pläne zu zeichnen.

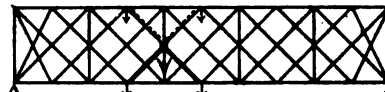
Fig. 72.

Dabei übergibt man jedem der Fachwerke diejenigen Lasten, die an dessen Knotenpunkten angreifen. Schliesslich addirt man für die gemeinschaftlichen Stäbe (Gurtungen und Endpfosten) die entsprechenden Werte beider Pläne. Bei gekrümmten Gurtungen stösst man hierbei auf schwach geknickte Gurtungsstäbe; doch fehlt man nicht stark, wenn man diese Stäbe durch gerade ersetzt.

Will man die Gurtungskräfte nach dem Momenten verfahren berechnen, so denkt man sich das Fachwerk in vier einteilige zerlegt. Ein einzelner Stab gehört dann jedem von diesen an. Man kann demnach für jeden Stab vier Drehpunkte unterscheiden; dementsprechend findet man vier Momentenordinaten, daraus vier Kräfte, und von diesen nimmt man das arithmetische Mittel.

Bei der Strebenberechnung kann man wie beim zweiteiligen Fachwerke vorgehen; nur hat man jetzt die für einteiliges Fachwerk gültigen Kräfte durch 4 zu teilen. Noch einfacher bestimmt man die Strebenkräfte dadurch, dass man deren Mitten in die Kurven der grössten Querkräfte hinunter lotet. (Vgl. die Betrachtungen des Falles b).

Fig. 73.



Eine Ausnahme hiervon muss bei denjenigen vierteiligen Fachwerken gemacht werden, welche nur an jedem zweiten Knotenpunkte einen Pfosten und dementsprechend einen Querträger besitzen. In diesem Falle müssen die Pfosten in halber Höhe notwendig mit den sie kreuzenden Streben vernietet sein, weil letztere sonst keine Belastung erführen. Infolge dieser Vernietung geht die Hälfte der Pfostenlast an diesem Kreuzungspunkte auf die Streben über. Diese erfahren demnach ausser der gewöhnlichen Spannung in ihrer untern Hälfte einen Druck, in der oberen einen Zug. (Vgl. Fig. 73). Eine sorgfältige Verfolgung dieser doppelten Wirkungsweise ist umständlich. Man fehlt indessen nicht stark, wenn man die Spannungen dieser Strebenstücke jeweilen gleich gross annimmt wie diejenigen der im gleichen Felde befindlichen Diagonalstreben. — Auf die Streckbaumkräfte übt das Weglassen jedes zweiten Pfostens keinen nennenswerten Einfluss aus.

b) Fachwerke mit gekreuzten Streben ohne Pfosten.

Entfernt man im zweiteiligen Fachwerke sämtliche Pfosten mit Ausnahme des ersten und letzten, so besitzt das Fachwerk, wie man sich leicht überzeugt, nur noch einen überzähligen Stab. Die Berechnung der Stabkräfte gestaltet sich jetzt etwas anders.

Man zerlegt das Fachwerk in diesem Falle derart in zwei einteilige, dass man zwei zusammenhängende Strebenzüge unterscheidet und das eine mal den einen, das andere mal den andern Zug als vorhanden ansieht. Die Gurtungsstäbe und die Endpfosten gehören wiederum beiden Fachwerken an.

Um für das zweiteilige pfostenlose Fachwerk einen *Cremona'*-schen Kräfteplan zu zeichnen, kann man folgendermassen verfahren: Man bestimmt die Kraft in dem einen Endpfosten derart, dass die beiden anschliessenden Streben wie oben je die halbe Belastung tragen, und führt hierauf die Zerlegung, die jetzt keine Willkür mehr zulässt, bis ans andere Ende durch. Dann wiederholt man diese Arbeit, indem man an letzterem Ende beginnt und in gleicher Weise nach dem ersteren hin fortschreitet. Schliesslich nimmt man von den zwei Werten, die sich für die Stabkräfte ergeben, je das Mittel.

Der Kräfteplan, welchen man hierbei erhält, sieht demjenigen der Figur 69 ähnlich. Doch fallen selbstverständlich die den inneren Pfosten entsprechenden Kräfte weg; die Parallelogramme, welche die Strebenkräfte darstellen, berühren sich jetzt in den Ecken.

Etwas genauere Ergebnisse bekommt man, wenn man von der Annahme ausgeht, dass jedes der beiden einteiligen Fachwerke diejenigen Lasten trage, die an seinen Knotenpunkten angreifen. Bei Parallelträgern kann man auf Grund dieser Annahme ohne Schwierigkeit zwei getrennte Kräftepläne zeichnen, bei gekrümmten Gurtungen dagegen nicht, weil man bei der Zerlegung in zwei einzelne Fachwerke geknickte Gurtstäbe erhält. Man verfährt daher besser folgendermassen:

Man bestimmt für jedes der beiden einteiligen Fachwerke den linken Auflagerdruck und beginnt, zwei getrennte Kräftepläne zu zeichnen, beschränkt sich aber auf die Bestimmung der ersten zwei oder drei Stabkräfte. Nun vereinigt man die gefundenen Kräfte in einem gemeinschaftlichen Plane und setzt diesen bis ans Ende fort. Willkür kommt, sobald die ersten Stabkräfte bekannt sind, nicht mehr vor.

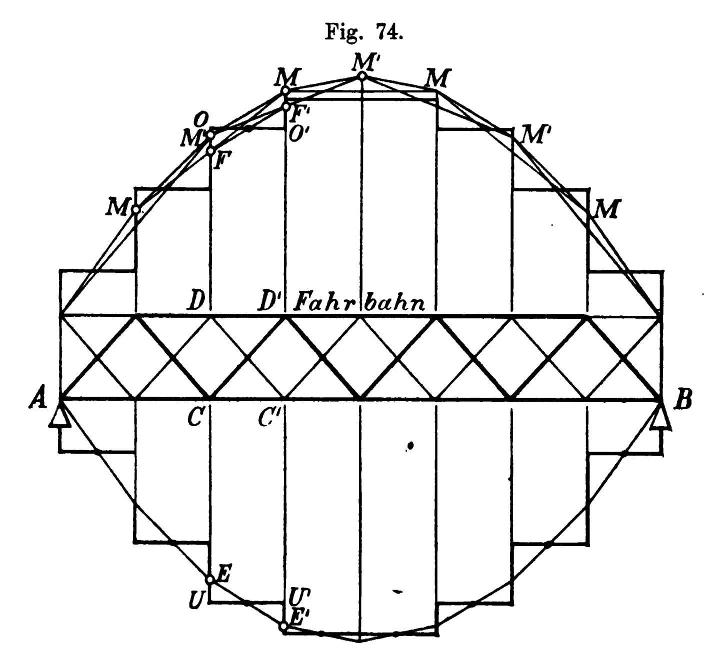
Auf vorstehend beschriebenem Wege wird man im Allgemeinen den Einfluss eines einzelnen Belastungsfalles, zum Beispiel die Wirkung des Eigengewichtes ermitteln. Den Einfluss der zufälligen Belastung bestimmt man besser nach dem Momenten- oder nach dem Schnittverfahren.

Wir zeigen zunächst, wie die Gurtungen eines Parallelträgers mit oben liegender Fahrbahn berechnet werden. (Vgl. *Winkler's* Vorträge über Brückenbau; Theorie der Brücken, II. Heft.)

Es soll das durch die Figur 74 dargestellte Fachwerk berechnet werden. Wir zerlegen es in zwei einteilige Fachwerke. Das erste umfasse die stark gezogenen Stäbe; zu dem zweiten gehören die schwach gezogenen Streben nebst Gurtungen und Endpfosten.

Man bestimmt zuerst auf bekannte Weise für jeden Knotenpunkt das grösste Moment, trägt die gefundenen Werte nach oben und unten auf und verbindet ihre Endpunkte zu den Kurven der Maximalmomente. Soll nun beispielsweise die im Stabe CC' wirkende Kraft gefunden werden, so betrachtet man diesen Stab zuerst als Glied des einen und dann als Glied des andern Fachwerkes. Im ersten Falle (stark gezogene Streben) fällt der Drehpunkt nach D', im zweiten (schwach gezogene Streben) nach D. Im ersten Falle ist das Drehpunktsmoment gleich $C'E'$, im zweiten gleich CE. Die gesuchte Gurtungskraft entspricht somit dem arithmetischen Mittel beider Strecken. Will man wie früher (S. 46

Fig. 74.



und Tafel 1) den Verlauf der Gurtungskräfte durch eine Staffellinie übersichtlich darstellen, so hat man hiernach nichts weiter zu thun, als durch die Mitten der Linien EE' wagrechte Linien UU' zu ziehen.

Für den oberen Streckbaum liegen die Verhältnisse etwas anders.

Betrachtet man den Stab DD' als Glied des ersten, stark gezogenen Fachwerkes, so stellt C den Drehpunkt dar. Diesem entspricht jedoch nicht die Momentenordinate DM', sondern die

Ordinate $D\,F$, welche durch die Verbindungslinie $M\,M$ abgeschnitten wird. Denn wenn das stark gezogene Fachwerk allein vorhanden ist, so fallen in der oberen Gurtung die ungeraden Knotenpunkte weg und die Biegungsmomente werden durch das Polygon $M\,M$.... begrenzt.

Für das zweite Fachwerk fallen ebenso die geraden Knotenpunkte aus dem Spiele. Die Momente werden durch den Linienzug $M'\,M'$.... begrenzt. Betrachtet man daher den Stab $D\,D'$ als Glied des zweiten Fachwerkes, so entspricht ihm die Ordinate $D'F'$, welche lotrecht über dem Drehpunkte C' von diesem Linienzuge abgeschnitten wird.

Um schliesslich die Staffellinie der oberen Gurtung zu erhalten, hat man die Punkte $F\,F'$... zu verbinden und durch die Mitten der Verbindungslinien wagrechte Linien $O\,O'$ zu ziehen.

Die Streckbaumkräfte selbst bekommt man bekanntlich dadurch, dass man die Ordinaten der Staffellinien mit der Polweite H multiplicirt und das Produkt durch die Fachwerkshöhe h dividirt. (Vgl. S. 46.)

Liegt die Fahrbahn in der Höhe des unteren Streckbaumes, so vertauscht man in der Zeichnung oben mit unten. In jedem Falle ist diejenige Gurtung, welche die Fahrbahn trägt, schwächer beansprucht als die andere. —

Nach demselben Verfahren kann selbstverständlich auch der Einfluss des Eigengewichtes auf die Gurtungen gefunden werden. Doch muss man, wenn sich dieses Gewicht ungleich auf die oberen und unteren Knoten verteilt, die Zeichnung doppelt, einmal für die oberen und dann für die unteren Gewichte durchführen.

Nachdem das Verfahren für parallele Gurtungen erklärt worden ist, dürfte es kaum nötig sein zu beschreiben, wie man bei polygonalen Streckbäumen vorzugehen hat. Der Unterschied besteht einzig darin, dass man die mit H multiplicirten Momentenordinaten nicht durch die Fachwerkshöhe, sondern durch die Entfernungen der Gurtungsstäbe von ihren Drehpunkten zu dividiren hat. (Vgl. S. 72 und Taf. 3.)

Auch für die Berechnung der Streben müssen wir einen von früher verschiedenen Weg einschlagen. Zur Erläuterung gehen wir (nach *Winkler's* Theorie der Brücken, II. Heft) von der »Einflusslinie« der zu berechnenden Strebe aus.

Es sei die Kraft zu finden, welche in der Strebe CC' (Fig. 75) im ungünstigsten Falle entsteht.

Lässt man eine Einzellast P von rechts nach links über den Träger wandern, so nimmt der linke Auflagerdruck stetig zu und wird am Schlusse gleich P. Macht man $A_1 A_1'$ gleich P, so geben die Linien $A_1 B_1$ und $A_1' B_1$ die Grösse des Auflagerdruckes A für jede Stellung der Last an. Ebenso bestimmt die Gerade $A_1 B_1'$ mit $A_1 B_1$ die Grösse des rechten Stützendruckes B. Legt man durch das Fachwerk bei der Strebe CC' einen Schnitt, so bildet anfänglich A und, nachdem die Last den Schnitt überschritten hat, B die Querkraft. Auf die Strebe CC' wirkt aber diese Querkraft nur dann mit ihrem vollen Werte, wenn die Last P auf einem Knotenpunkte des stark ausgezogenen Strebenzuges ruht. Gelangt die Last auf einen Knotenpunkt des andern Strebenzuges, so übt sie auf die Strebe CC' keinen Einfluss aus. Die für die Strebe CC' massgebende Querkraft schwankt also fortwährend zwischen A (bzhgw. B) und Null. Zeichnerisch wird sie durch eine zickzackförmige Linie begrenzt, deren Ecken abwechselnd auf $A_1' B_1$ (bzhgw. $A_1 B_1'$) und $A_1 B_1$ liegen. Dabei wird die Strebe auf Druck oder auf Zug in Anspruch genommen, je nachdem die Last P rechts oder links von C liegt.

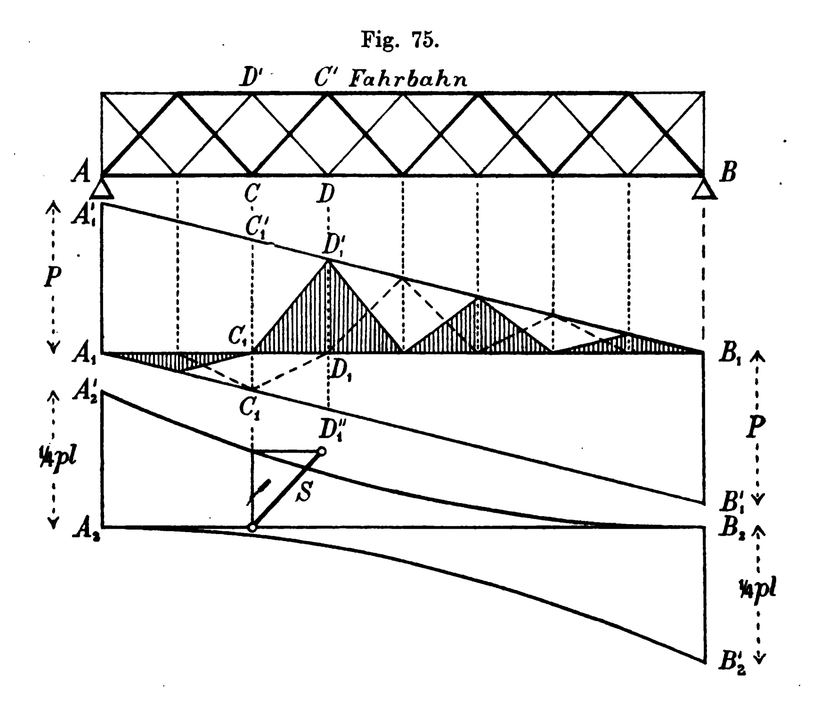
Belastet man nun den Träger mit gleichförmig verteilter Last, so stellt offenbar die von der Zickzacklinie und der Grundlinie eingeschlossene, in der Figur schraffirte Fläche die in der Strebe herrschende Kraft dar, und zwar die Fläche rechts von C den grössten Druck, die Fläche links von C den grössten Zug. Der Inhalt der ersteren Fläche ist aber halb so gross wie das Dreieck $B_1 C_1 C_1'$ das heisst halb so gross wie der Auflagerdruck A, wenn die Belastung von C bis B reicht. Ebenso ist der Inhalt der zweiten Fläche gleich dem halben Stützendrucke B für eine von A bis C reichende Belastung. Daraus ergibt sich folgende einfache Bestimmungsweise der in der Strebe auftretenden Grenzspannungen.

Man zeichnet (Fig. 75 unten) eine Parabel $A_2' B_2$ mit der Endordinate $^1/_4\, p\, l$ und lotet den unteren Endpunkt der Strebe hinunter. Dadurch findet man die für die Strebe massgebende grösste Querkraft und, wenn man diese parallel zur Strebe und zur Gurtung zerlegt, die gesuchte Grenzspannung S. Zeichnet man eine zweite gleich grosse Parabel $A_2 B_2'$, so kann man an derselben Stelle die andere Grenzspannung bestimmen.

Führt man diese Betrachtung für die Strebe $D\,D'$ durch, so gelangt man auf die gestrichte Zickzacklinie. Die Flächen, welche diese mit der Grundlinie einschliesst, sind etwas kleiner als die halben Dreiecke $B_1\,D_1\,D_1'$ und $A_1\,D_1\,D_1''$. Doch ist der Unterschied geringfügig und wird der Einfachheit wegen am besten vernachlässigt.

Ruht die Fahrbahn auf der unteren Gurtung, so sind statt

Fig. 75.



der Punkte C und D die Punkte C' und D' massgebend. Wir verfahren daher in allen Fällen nach folgender Regel:

Um für eine Strebe eines zweiteiligen Parallelträgers die grösste und kleinste Spannung zu finden, lote man denjenigen Endpunkt, der nicht in der Fahrbahn liegt, in die Kurve der halben grössten Auflagerdrücke hinunter und zerlege die dadurch bestimmten Drücke parallel zu Strebe und Gurtung.

Besteht die zufällige Last aus einer Reihe von Einzellasten, so kann man diese auf einen Streifen Pauspapier auftragen, diesen Streifen über die schraffirte Fläche legen und durch Multiplication

der Lasten mit den Ordinatenlängen die Querkraft bestimmen. Durch Verschieben des Streifens und Wiederholung der Multiplication findet man bald heraus, welche Laststellung die ungünstigste ist. Viel rascher, wenn auch nicht ganz genau, gelangt man zu der gesuchten Querkraft, wenn man für die gegebene Lastenreihe die Kurve der Stützendrücke zeichnet und einfach wie oben vorgeht. Man bekommt die Strebenkräfte in diesem Falle meistens etwas zu klein.

Man erkennt leicht, dass von zwei sich kreuzenden Streben die Druckstrebe stärker beansprucht wird als die Zugstrebe, wenn die Fahrbahn oben liegt, und dass umgekehrt bei unten liegender Fahrbahn die Zugstrebe stärker beansprucht wird als die Druckstrebe.

Auch der Einfluss des Eigengewichtes auf die Streben lässt sich auf dem soeben beschriebenen Wege ermitteln. Man zeichnet die schiefe Gerade der Eigengewichtsquerkräfte, indem man links und rechts $^1/_4\,gl$ aufträgt, und lotet, wenn das Eigengewicht ganz auf die obern Knoten entfällt, den Fuss der Strebe, wenn es unten angreift, den Kopf, wenn es sich dagegen auf beide Gurtungen verteilt, einen mittleren Punkt herunter, der die Strebe im umgekehrten Verhältnisse teilt, wie sich das Gewicht auf oben und unten verteilt.

Bei polygonalen Gurtungen ist eine Zerlegung in zwei einteilige Fachwerke, wie schon bemerkt, nicht durchführbar, ohne dass man auf geknickte Gurtungsstäbe stösst. Doch fehlt man nicht stark, wenn man das für Parallelträger abgeleitete Verfahren auch auf Fachwerke mit gekrümmter Gurtung überträgt und dabei die geknickten Stäbe in passender Weise durch geradlinige ersetzt. Bekanntlich sind hier die Querkräfte parallel zur Strebe und parallel zu einer Linie zu zerlegen, welche den Schnittpunkt von Strebe und Auflagerlinie mit dem Schnittpunkte der betreffenden Gurtstäbe verbindet.

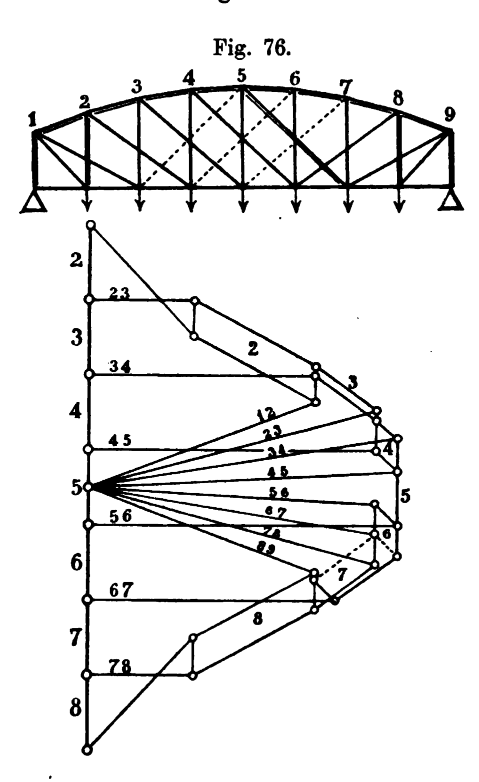
Soll ein Fachwerk mit mehr als zweifachem Strebenzuge behandelt werden, so geht man im Allgemeinen nach denselben Grundsätzen und Regeln vor. Die Berechnung der Stabkräfte nach *Cremona* wird indessen auch hier am besten in getrennten Kräfteplänen vorgenommen. Bei der Berechnung der Gurtungen nach dem Momentenverfahren unterscheidet man so viele Drehpunkte und Momentenordinaten als Strebenzüge vorhanden sind und nimmt das Mittel aus sämtlichen Werten. Die Streben werden ganz so, wie es die Figur 75 zeigt, berechnet; nur muss selbstverständlich die Endordinate der Querkraftkurve gleich $^1/_2\,pl$, geteilt durch die Anzahl der Strebenzüge, sein.

c) Fachwerke mit einseitig geneigten Streben.

Die auf den Tafeln 1 und 2 behandelten Fachwerke werden häufig mit mehrfachem Strebenzuge ausgeführt. Es soll noch deren Berechnung für doppelten Strebenzug erklärt werden.

Im Grunde genommen ist ein mehrteiliges Fachwerk mit einseitig geneigten Streben ganz so zu behandeln wie ein Fachwerk mit gekreuzten Streben ohne Pfosten; doch ergeben sich einige Abweichungen, die eine nähere Besprechung verlangen.

Fig. 76.



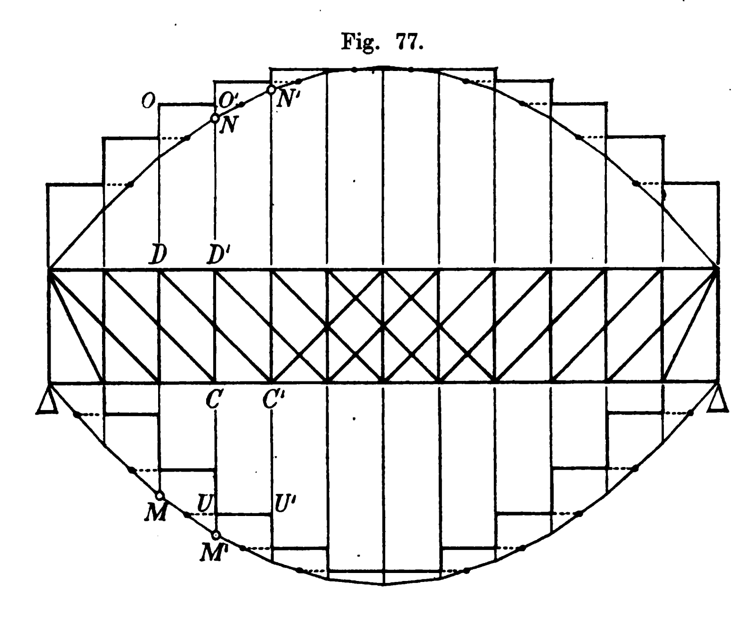
Wie das einteilige Fachwerk mit einseitig geneigten Streben, so wird auch das mehrteilige in der Regel mit schlaffen Diagonalen ausgestattet und verlangt deshalb auf eine gewisse mittlere Strecke Gegenstreben. Auf die Berechnung der Gurtungen hat dieser Umstand keinen Einfluss, da die Gegenstreben bei den für die Gurtungen gefährlichsten Belastungen spannungslos sind. Dagegen ist bei der Strebenberechnung hierauf zu achten.

Die Figur 76 zeigt zunächst, wie der *Cremona'*sche Kräfteplan eines solchen Fachwerkes aussieht. Der Einfachheit zu lieb sind nur die untern Knoten als belastet angenommen worden. Für je zwei sich kreuzende Streben erhält man ein Parallelogramm (vgl. Fig. 69, S. 140), in welchem jede der beiden Strebenkräfte zweimal auftritt. Diesen Parallelogrammen sind die Nummern der betreffenden Pfosten beigeschrieben. Die übrigen Stabkräfte kommen im Plane nur einmal vor. Auf Druck beanspruchte Stäbe sind

in der Fachwerkzeichnung mit einem Doppelstrich versehen. Die Diagonale 4 6 ist spannungslos, so dass das Parallelogramm 5 nur aus einem Strich besteht.

Wir haben angenommen, dass das Fachwerk mit schlaffen Diagonalen hergestellt sei und deshalb in den mittleren Feldern Gegenstreben besitze. Unter der Voraussetzung, dass es sich darum

Fig. 77.



handle, den Einfluss des Eigengewichtes zu bestimmen, haben wir von den sich kreuzenden Diagonalen im Kräfteplane nur die nach rechts fallenden berücksichtigt. (Vgl. Tafel 2_2 und S. 60).

Um den Kräfteplan zu beginnen, bestimmt man die Spannung der ersten Diagonale, indem man 2 Fachgewichte (den halben Auflagerdruck) aufträgt und parallel zur Strebe und zum ersten oberen Gurtstab zerlegt. Von da an ist nichts mehr willkürlich. Dass die Diagonale 4 6 spannungslos bleibt, dient als Probe.

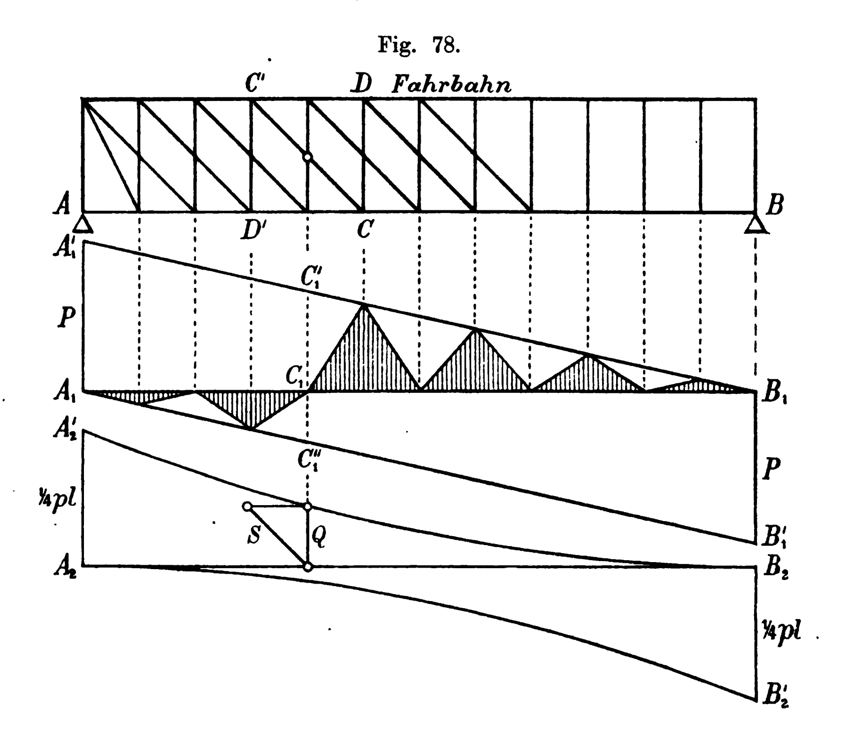
Die Figur 77 zeigt ferner, wie man aus den Momentenkurven die Gurtungskräfte eines Parallelträgers findet.

Betrachten wir im Besonderen den Stab $C\,C'$, so fällt dessen Drehpunkt nach D oder nach D', je nachdem man den einen oder den andern Strebenzug ins Auge fasst. Die Kraft in $C\,C'$ hängt also von dem arithmetischen Mittel der unter D und D' abgegriffenen Momente ab. Wir halbiren demnach die Linie $M\,M'$ und ziehen

durch den Halbirungspunkt die Linie $U\,U'$. Verfährt man in gleicher Weise mit den übrigen Stäben, so gelangt man zu der der unteren Gurtung entsprechenden Staffellinie. Umgekehrt sind für den Stab $D\,D'$ die Punkte C und C' die Drehpunkte. Man halbirt daher die Linien $N\,N'$ und zieht die wagrechten Linien $O\,O'$, um die Staffellinie für den oberen Streckbaum zu erhalten. Auf die Lage der Fahrbahn kommt es hierbei nicht an.

Bei polygonaler Gurtung hat man die Momentenordinaten zuerst

Fig. 78.



mit der Polweite H zu multipliciren, das Produkt durch die Entfernung des Stabes vom Drehpunkte zu dividiren und dann das arithmetische Mittel zu nehmen.

Was endlich die Strebenkräfte betrifft, so haben wir (gleich wie im Falle b) in der Figur 78 die Einflusslinie für die schiefe Strebe $C\,C'$ gezeichnet. Unter der Annahme, dass die beiden Strebenzüge von einer über den Träger gleitenden Einzellast abwechselnd in Anspruch genommen werden, ergibt sich auch hier eine gebrochene Linie, deren Ecken abwechselnd auf den Linien $A_1\,B_1$ und $A_1'\,B_1$

(bzhgw. $A_1\ B_1'$) liegen. Die schraffirte Fläche oberhalb $A_1\ B_1$ stellt für gleichförmige Belastung den grössten Zug, die Fläche unterhalb den grössten Druck dar. Erstere ist gleich dem halben Inhalte des Dreieckes $B_1\ C_1\ C_1'$, letztere gleich dem halben Inhalte von $A_1\ C_1\ C_1''$. Betrachtungen, die denjenigen auf den Seiten 147 und 148 ganz gleich sind, führen schliesslich auf die Regel:

Um die Grenzspannungen für eine schiefe Strebe des zweiteiligen Parallelträgers zu erhalten, lote man deren Mittelpunkt in die Kurven der halben grössten Querkräfte hinunter und zerlege die dadurch bestimmten Kräfte parallel zu Strebe und Gurtung.

Für die lotrechten Streben ergeben sich, wie man leicht erkennt, ganz die nämlichen Einflusslinien; doch kommt hier noch die Lage der Fahrbahn in Betracht. Bei oben liegender Fahrbahn entsprechen die in der Figur 78 schraffirten Flächen dem Pfosten $C\ D$. Die grösste in diesem Pfosten auftretende Druckspannung ist demnach gleich Q, gleich der lotrechten Seitenkraft von S. Man erkennt die Richtigkeit dieses Ergebnisses auch daraus, dass im Punkte C Gleichgewicht zwischen den vier daselbst angreifenden Stabkräften herrschen muss. Für unten liegende Fahrbahn entspräche die Kraft Q dem Pfosten $C'\ D'$. Allgemein:

Um die Grenzspannungen für eine lotrechte Strebe des zweiteiligen Parallelträgers zu erhalten, lote man den Mittelpunkt derjenigen schiefen Strebe, welche sich mit der lotrechten auf der unbelasteten Gurtung schneidet, in die Kurven der halben grössten Querkräfte hinunter.

Obschon diese Regeln zunächst nur für gleichmässige Belastung abgeleitet sind, so kann man sie auch unbedenklich für eine Reihe von Einzellasten anwenden. Man erhält jedoch fast immer etwas zu kleine Kräfte. Will man genauer vorgehen, so zeichne man die Einflusslinie für $P = 1$, lege darüber einen Streifen durchsichtiges Papier, auf dem die Lastlinien aufgetragen sind, multiplicire jede Last mit der ihr entsprechenden Ordinate und summire die Produkte. Durch einiges Probiren wird man bald diejenige Stellung der Lasten gefunden haben, für welche die Summe am grössten ausfällt.

Bei polygonalen Gurtungen ändert sich nichts weiter, als dass bei der Zerlegung der Querkräfte wie bei einteiligen Fach-

werken die Drehpunkte der Streben berücksichtigt werden müssen Die gebrochenen Gurtstäbe ersetzt man dabei passend durch gerade.

Besitzt das Fachwerk gekrümmte Gurtungen, so behandelt man bei der Berechnung der Streben das eigene Gewicht und die zufälligen Lasten wohl am besten getrennt, das erste mittelst eines *Cremona'*schen Planes (Fig. 76), die letzteren nach den soeben gegebenen Regeln. Bei parallelen Gurtungen lassen sich dagegen beide Belastungen vereinigt behandeln. Man zeichnet die Kurven der grössten Querkräfte für ganze Belastung. (Vgl. Fig. 29, S. 52). Dann lotet man die Mitten der schiefen Streben hinunter und bestimmt durch Zerlegung die in denselben wirkenden grössten und kleinsten Kräfte. Die entsprechenden Kräfte der lotrechten Streben erhält man, indem man das Gewicht eines Knotenpunktes von den Querkräften abzieht, beziehungsweise dazu addirt.

Bei mehr als zweifachem Strebenzuge wird sowohl bei den Gurtungen als bei den Streben nach gleichen Grundsätzen vorgegangen. Nähere Erläuterungen dürfen wir uns um so eher ersparen, als drei- und vierteilige Fachwerke mit einseitig geneigten Streben selten gebaut werden.

37. Genaue Berechnung der Fachwerke mit mehrfachen Streben.

Die Ergebnisse der vorhergehenden Nummer sind alle nur angenähert richtig, weil wir bei ihrer Ableitung von mehr oder weniger willkürlichen Annahmen ausgegangen sind. Will man genaue Ergebnisse erzielen, so muss man die elastischen Formänderungen berücksichtigen und zu diesem Zwecke die in der Nummer 35 besprochenen Kräftediagramme zu Rate ziehen.

a) Fachwerke mit Pfosten und gekreuzten Streben.

Handelt es sich nur um ein einziges Fach mit Kreuzstreben, so besteht das Kräftediagramm nur aus sechs Kräften, da alle ausserhalb des betreffenden Faches liegenden Stäbe von der statischen Unbestimmtheit unberührt bleiben. Dieses Diagramm braucht, wenn man die Stabkräfte mittelst eines *Cremona'*schen Kräfteplanes bestimmt hat, nicht gezeichnet zu werden; es findet sich als Viereck $LMNO$ bereits im Kräfteplane. (Fig. 67, S. 138).

Denn nimmt man beispielsweise die im Stabe 8 wirkende Diagrammkraft K_8 gleich $L\,M$ an, so folgt sofort $K_6 = L\,N$ und $K_7 = M\,N$, sodann $K_{10} = L\,O$, $K_{11} = M\,O$ und endlich $K_9 = N\,O$.

Man wird nun am besten thun, eine der beiden Strebenkräfte zunächst gleich null zu setzen und hierauf mit Hülfe der Gleichung

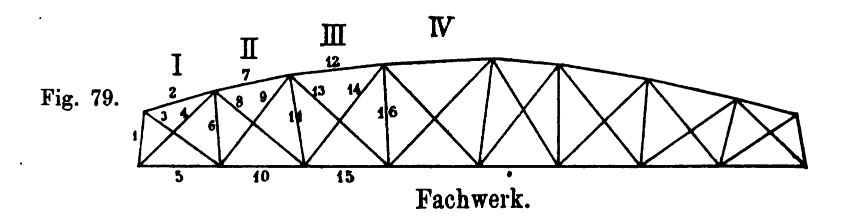
$$\alpha = -\,\Sigma\left(\frac{K\,S'\,s}{F}\right) : \Sigma\left(\frac{K^2\,s}{F}\right)$$

(vgl. S. 130) den Faktor α zu berechnen. Hierauf teilt man eine der Seiten des Viereckes beispielsweise $L\,O$, im Verhältnisse $\alpha : 1$ in zwei Teile und findet hierdurch den Punkt (10); dadurch ist alles Uebrige bestimmt. —

Zu beachten ist, dass im Diagramme die beiden Diagonalen des Viereckes stets den entgegengesetzten Sinn haben wie die vier Umfangsseiten. Denn wirken in den beiden Streben Zugkräfte, so entsteht in den beiden Gurtungsstäben und in den Pfosten Druck und umgekehrt.

Geometrisch betrachtet bilden das Fach und das Diagramm zwei Vierecke mit 6 Paaren von parallelen Seiten, ohne dass im Allgemeinen die beiden Vierecke einander ähnlich sind.

Fig. 79.



Fachwerk.

Fig. 80.

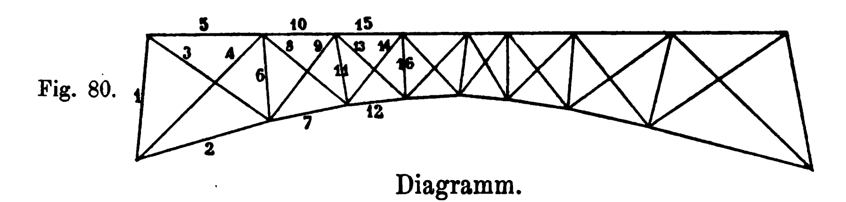


Diagramm.

Sind sämtliche Fächer mit doppelten Streben versehen, so wird die Lösung der Aufgabe umständlicher.

Zunächst muss für jedes Fach ein Diagramm gezeichnet werden. Dabei richtet man es am besten so ein, dass die gleichnamigen Seiten auch gleich lang werden, und reiht sämtliche Diagramme aneinander, wie es die Figur 80 für ein Fachwerk mit 8 Feldern zeigt.

Nun handelt es sich darum, für jedes Fach den Faktor α zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass die in den Pfosten wirkenden Kräfte jetzt stets von zwei Fächern abhängig sind, die verschiedenen Felder sich folglich gegenseitig beeinflussen.

Bezeichnet man die verschiedenen Faktoren mit α_I bis α_{VIII}, so ergeben sich die endgültigen Kräfte des dritten Faches

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= S_{11}' + \alpha_{II} K_{11} + \alpha_{III} K_{11} \\
S_{12} &= S_{12}' + \alpha_{III} K_{12} \\
S_{13} &= S_{13}' + \alpha_{III} K_{13} \\
S_{14} &= S_{14}' + \alpha_{III} K_{14} \\
S_{15} &= S_{15}' + \alpha_{III} K_{15} \\
S_{16} &= S_{16}' + \alpha_{III} K_{16} + \alpha_{IV} K_{16}.
\end{aligned}
$$

Führt man diese Werte in die allgemeine Gleichung

$\Sigma(K . \Delta s) = \Sigma\left(\frac{K S s}{F E}\right) = 0$ ein, setzt zur Abkürzung

$$\frac{K^2 s}{F} = k$$

und löst nach α_{III} auf, so findet man (für constantes E)

$$\alpha_{III} = - \frac{\Sigma_{11}^{16}\left(\frac{S' k}{K}\right) + \alpha_{II} k_{11} + \alpha_{IV} k_{16}}{\Sigma_{11}^{16}(k)}.$$

Schreibt man diese Gleichung für jedes Fach auf, so erhält man ebenso viele Gleichungen, als Unbekannte zu berechnen sind. Da aber die zahlenmässige Auflösung so vieler Gleichungen umständlich ist, so wird man besser den folgenden Weg einschlagen.

Sieht man zunächst in obigem Ausdrucke von den beiden letzten Gliedern des Zählers ab, so erhält man denjenigen Wert von α_{III}, welcher sich ergibt, wenn das dritte Fach allein Kreuzstreben besitzt. Nennt man diesen Wert (α_{III}), so schreibt sich die Gleichung auch

$$\alpha_{III} = (\alpha_{III}) - \frac{\alpha_{II} k_{11} + \alpha_{IV} k_{16}}{\Sigma_{11}^{16}(k)}$$

Die Rechnung lässt sich nun derart durchführen, dass zunächst auf den gegenseitigen Einfluss der Fächer keine Rücksicht genommen und für jedes Fach die Grösse (α) ermittelt wird. Dann setzt man diese noch ungenauen Grössen in obige Formel ein und verbessert dadurch die gefundenen (α). Durch mehrfaches Corrigiren, bei

welchem die Aenderungen fortwährend kleiner werden, gelangt man schliesslich zu den richtigen Werten von α.

Sind diese Werte gefunden, so werden sämtliche K mit den ihnen entsprechenden α multiplicirt und die Produkte den Werten S' beigefügt. Bei der Berechnung der Pfostenkräfte sind die α der beiden anstossenden Fächer stets zusammenzuzählen.

Etwas einfacher gestalten sich die Formeln, wenn die Felder sämtlich rechteckig sind. Denn in diesem Falle wird das Diagramm dem Fachwerke ähnlich, man kann sogar sagen vollkommen gleich; denn die erste Kraft des Diagrammes kann man beliebig gross, also auch gleich der Länge des betreffenden Stabes nehmen.

Bei rechteckigen Fächern darf man demnach in obigen Formeln an die Stelle von K überall die Stablänge s setzen; nur muss dabei berücksichtigt werden, dass die Kräfte K für die Diagonalen das entgegengesetzte Zeichen haben wie für die Gurtungen und Pfosten. Dann wird

$$k = \frac{s^3}{F}$$

und die Correctur für das dritte Fach

$$\alpha_{III} = - \frac{\Sigma_{11}^{16}\left(\frac{S' s^2}{F}\right) + \alpha_{II}\, k_{11} + \alpha_{IV}\, k_{16}}{\Sigma_{11}^{16}\,(k)}$$

oder, wenn σ' die im Stabe herrschende spezifische Spannung bedeutet

$$\alpha_{III} = - \frac{\Sigma_{11}^{16}\,(\sigma' s^2) + \alpha_{II}\, k_{11} + \alpha_{IV}\, k_{16}}{\Sigma_{11}^{16}\,(k)}$$

Bei der Anwendung dieser Formel hat man darauf zu achten, dass das Zeichen der auf Diagonalen bezüglichen σ' stets umzukehren ist. Die k dagegen sind für alle Glieder positiv.

Sind die Werte α gefunden, so hat man die Längen s damit zu multipliciren und die Produkte zu den ursprünglichen Kräften hinzuzufügen. Auch hier sind wiederum die Vorzeichen der auf die Streben bezüglichen Werte zu ändern.

Viel gewonnen wird indessen durch diese veränderte Berechnungsweise nicht.

Nennt man die Höhe des Faches h und die Länge f, so folgt, dass die endgültigen Spannungen stets folgende einfache Bedingung erfüllen müssen:

$$(\sigma_{11} + \sigma_{16})\, h^2 + (\sigma_{12} + \sigma_{15})\, f^2 = (\sigma_{13} + \sigma_{14})\, (h^2 + f^2).$$

Handelt es sich darum, Eigenspannungen oder den Einfluss einseitiger Erwärmung zu berechnen, so kommt auch hier die gegenseitige Beeinflussung der verschiedenen Felder in Betracht. An Stelle der auf der Seite 132 stehenden Formel tritt demzufolge beispielsweise für das dritte Fach die Formel

$$\alpha_{III} = - \frac{K_n \varDelta s_n + k_{11} \alpha_{II} + k_{16} \alpha_{IV}}{\Sigma_{16}^{11} (k)}.$$

Im Uebrigen gelten die früheren Regeln. —

Zur vollständigen Berechnung einer Fachwerkbrücke genügt freilich die einmalige Durchführung obiger Rechnung nicht; sie sollte vielmehr für jede ungünstigste Lastenstellung vorgenommen werden, also im Allgemeinen ebenso oft, als das Fachwerk Fächer besitzt. Der Praktiker wird sich dagegen, wenn er überhaupt auf diesen Gegenstand eintritt, meistens damit begnügen, den Fall der vollständigen Belastung durchzurechnen, um sich ein Bild davon zu verschaffen, wie hoch sich der Fehler des üblichen Rechnungsverfahrens ungefähr belaufe, und um die Frage beantworten zu können, ob die gewählten Stabquerschnitte eine Aenderung verlangen oder nicht. Vielfach wird es zu diesem Zwecke sogar ausreichen, sich auf die Bestimmung der eingeklammerten α zu beschränken. —

Will man für ein und dasselbe Fachwerk mehrere Belastungsfälle durchrechnen, so ist es zweckmässig, diese Rechnungen auf zeichnerischem Wege vorzunehmen. Das einzuschlagende Verfahren bezweckt die direkte Auflösung der α-Gleichungen; es besitzt vielfache Aehnlichkeit mit der von Professor *Mohr* begründeten graphischen Berechnung der continuirlichen Balken. Eine Beschreibung desselben würde indessen über den Rahmen dieses Buches hinausgehen. —

Die genaue Berechnung von Fachwerken mit vierfachem Strebenzuge ist umständlicher. Am besten schlägt man den allgemein gültigen Weg (Nr. 35) ein. Man bildet zuerst ein statisch bestimmtes Fachwerk, indem man so viele Stäbe entfernt, als überzählige vorhanden sind. Dann zeichnet man, von jedem dieser Stäbe ausgehend, ein Kräftediagramm und stellt für jedes Diagramm die Gleichung $\Sigma (K \,.\, \varDelta s) = 0$ auf, wobei $\varDelta s = \frac{S s}{EF}$ und $S = S' + \alpha_I K_I + \alpha_{II} K_{II} + \ldots.$ gesetzt wird. Hierin bedeuten die S' die angenähert berechneten Stabkräfte oder überhaupt Stabkräfte, die für den gegebenen Belastungsfall mit den äusseren Kräften im Gleichgewichte stehen. Dadurch erhält man zur Berechnung der unbekannten α die nötige Anzahl Gleichungen, löst diese auf und berechnet schliesslich die endgültigen Kräfte S.

Das Fachwerk der Figur 72 (S. 142) hat beispielsweise 11 überzählige Stäbe. Als solche kann man den einen Endpfosten, die beiden anschliessenden steilen Diagonalen und sämtliche inneren Pfosten betrachten. Da die Gur-

tungen parallel laufen, werden die Diagramme sehr einfach; es ist kaum nötig sie zu zeichnen. Dagegen erfordert die Aufstellung und Auflösung der Gleichungen nicht wenig Zeit.

b) Fachwerke mit gekreuzten Streben ohne Pfosten.

Fehlt in dem Fachwerke der Figur 79 einer der Pfosten, zum Beispiel derjenige zwischen dem IIten und IIIten Fache, so hat man $F_{11} = 0$ zu setzen; daraus ergäbe sich $k_{11} = \infty$. Um trotzdem zu einer brauchbaren Formel zu gelangen, eliminirt man aus den beiden Gleichungen für α_I und α_{III} die Grösse k_{11}. Bestimmt man zugleich die Kräfte S' derart, dass die Pfostenkraft S_{11}' von vornherein verschwindet, so ergibt sich

$$\alpha_{II} = -\alpha_{III} = \frac{-k_6\,\alpha_I - \sum_6^{10}\left(\frac{k\,S'}{K}\right) + \sum_{12}^{16}\left(\frac{k\,S'}{K}\right) + k_{16}\,\alpha_{IV}}{\sum_6^{10}(k) + \sum_{12}^{16}(k)}$$

ein Ausdruck, in welchem k_{11} nicht mehr vorkommt.

Aehnlich könnte man vorgehen, wenn sämtliche Pfosten (mit Ausnahme der Endpfosten) fehlten; doch ist es in diesem Falle vorzuziehen, das Fachwerk, das jetzt nur einen einzigen Stab zu viel hat, nach Anleitung der Nummer 32 zu behandeln.

Man zeichnet demnach ein einziges Kräftediagramm, indem man eine Kraft, beispielsweise die des Endpfostens, beliebig annimmt. Das Diagramm sieht demjenigen der Figur 80 nahezu gleich; doch fehlen die Pfostenkräfte; auch wechseln jetzt die K für Gurtungen und Streben von Fach zu Fach das Zeichen.

Will man nun einen gegebenen Belastungsfall untersuchen, so ermittle man für diesen sämtliche Stabkräfte mittelst eines *Cremona*'schen Planes oder auf andere passende Weise, berechne den Faktor α nach der auf der Seite 130 stehenden Formel und hiernach die Verbesserungen $\alpha\,K$, welche an den Stabkräften anzubringen sind, damit den elastischen Formänderungen Genüge geleistet wird.

Sind die Gurtungen parallel, so wird auch hier das Diagramm dem Fachwerke ähnlich und bei geeigneter Wahl der ersten Kraft congruent. Dann sind die K abgesehen vom Vorzeichen gleich den Stablängen s; demzufolge wird (vgl. S. 157) $k = \frac{s^3}{F}$,

$\frac{k\,S'}{K} = \frac{S'\,s^2}{F} = \sigma'\,s^2$ und $\alpha = -\frac{\Sigma(\sigma'\,s^2)}{\Sigma(k)}$. Bei der Anwendung dieses Ausdruckes ist das Vorzeichen von σ' für die Gurtungen in jedem ungeraden Fache, für die Streben in jedem geraden Fache zu wechseln. Die k sind dagegen alle positiv. Es leuchtet ein, dass im Zähler die Glieder $\sigma'\,s^2$ sich grossenteils aufheben, weil sie bald positiv, bald negativ werden. Der Nenner dagegen setzt sich aus lauter positiven Grössen zusammen. Die Grösse α wird infolgedessen bei grösseren Fachwerken stets sehr klein, jedenfalls kleiner als bei Fachwerken mit Pfosten. Bei gerader Fachzahl, symmetrischer Bauart und symmetrischer Belastung wird α null.

Auch hier sind , wenn man die Aufgabe vollständig lösen will, mehrere Belastungsfälle durchzurechnen. Indessen wird man zunächst einen einzelnen Fall, beispielsweise den der halbseitigen Belastung durchrechnen und erst, wenn sich hierbei wesentliche Verbesserungen ergeben, zu anderen Fällen übergehen.

Bei Fachwerken mit vierfachem Strebenzuge betrachte man den einen Endpfosten und die beiden anschliessenden steilen Streben als überzählige Stäbe und verfahre wie im Falle a).

c) Fachwerke mit einseitig geneigten Streben.

Was soeben für die Fachwerke mit gekreuzten Streben gesagt worden ist, gilt auch hier. Die Aufgabe wird nur dadurch noch etwas verwickelter, dass hier Haupt- und Gegenstreben vorkommen, die abwechselnd ausser Thätigkeit treten. Man hat daher bei jedem Belastungsfalle zuerst die schlaffen Streben auszuscheiden und dann nach der angegebenen Regel vorzugehen. Trifft es sich wie beispielsweise bei gerader Fachzahl und symmetrischer Belastung, dass die Zahl der thätigen Stäbe gleich der doppelten Zahl der Knotenpunkte weniger 3 ist, so ist das Fachwerk für diesen Fall statisch bestimmt. Eine nähere Untersuchung ist somit nur bei einseitiger Belastung erforderlich.

d) Streben mit künstlicher Anspannung.

Im Anschluss an das soeben Gesagte muss noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass durch künstliche Anspannung einzelner Stäbe auch Gegenstreben in Thätigkeit versetzt werden können, die sonst spannungslos

bleiben. Enthält zum Beispiel ein Fachwerk zwei sich kreuzende bandförmige Diagonalen, deren eine (oder auch beide) bei der Herstellung mit zu geringer Länge eingefügt wurde, so entstehen in diesen, sowie in den benachbarten Gliedern Eigenspannungen. Zudem geht hierdurch bei ursprünglich statisch bestimmten Fachwerken die Bestimmtheit verloren. Je nach der Belastung des Fachwerkes ändern sich nun die in den Diagonalen herrschenden Zugkräfte; die eine nimmt stets zu, während die andere abnimmt, und erst wenn die eine null wird, hört das Fachwerk auf, statisch unbestimmt zu sein. War aber die künstliche Spannung gross genug, so kann das Fach auch fortwährend unbestimmt bleiben, und die genaue Berechnung der Stabkräfte kann dann nur auf dem vorhin erläuterten Wege durchgeführt werden. — Ganz dasselbe gilt auch von den hölzernen (*Howe*'schen) Fachwerken, wenn durch Anziehen der Hängeisen in den Holzstreben Eigenspannungen hervorgerufen werden.

38. Formänderung statisch unbestimmter Fachwerke.

Im dritten Kapitel haben wir die Wege beschrieben, welche einzuschlagen sind, wenn es sich darum handelt, die elastischen Formänderungen von statisch bestimmten Fachwerken zu ermitteln. Man kann nach *Williots* Vorgang aus den Verlängerungen und Verkürzungen der einzelnen Stäbe die veränderte Form des Fachwerkgerippes ableiten (Nr. 25) oder die Verschiebung einzelner Knotenpunkte mit Hülfe des Satzes von der virtuellen Arbeit bestimmen (Nr. 26) oder, wenn die Winkeländerungen der Gurtstäbe bekannt sind, die Durchbiegungskurve des Fachwerkes als Seilpolygon zeichnen (Nr. 27). Diese drei Wege verlangen, dass vorerst sämtliche Stabkräfte bestimmt werden. Will man dagegen die Formänderungen ohne diese Zwischenarbeit, unmittelbar aus den Stabquerschnitten und den äusseren Kräften ableiten, so eignet sich das in der Nummer 30 beschriebene, auf der Einführung der »elastischen Gewichte« beruhende Verfahren.

Die vier Wege lassen sich auch einschlagen, wenn das Fachwerk statisch unbestimmt ist. Ueber die drei ersteren ist dabei nichts Weiteres zu sagen; sie besitzen nebenbei den Vorteil, dass etwaige Fehler in der vorangegangenen Berechnung der Stabkräfte sich störend bemerklich machen, wodurch diese Berechnung zugleich auf ihre Richtigkeit geprüft wird. Das vierte Verfahren erfordert jedoch näheres Eintreten. Wir fassen zuerst Fachwerke mit Pfosten und zweiteiligen gekreuzten Streben ins Auge.

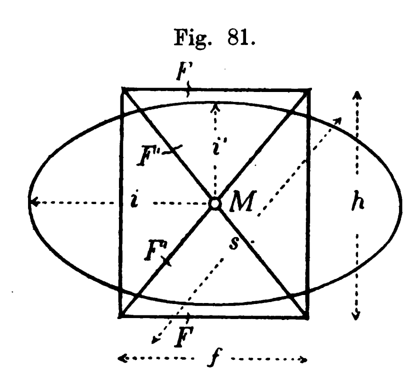
Bei Fachwerken dieser Art lassen sich die Stäbe nicht mehr gut einzeln oder zu zweien behandeln, wie es in den Nummern 28—30 geschehen ist. Das Verfahren wird übersichtlicher, wenn die Stäbe eines jeden Faches zu einer Gruppe vereinigt werden, mit andern Worten, wenn **für jedes Fach eine Elasticitätsellipse** gezeichnet wird.

Dass Fächer mit gekreuzten Streben hinsichtlich ihrer Formänderungen denselben Gesetzen wie statisch bestimmte Fachwerke unterworfen sind, das heisst, dass sich diese Aenderungen ebenfalls mit Hülfe von „Gewichten" und Elasticitätsellipsen bestimmen lassen, soll später (Nr. 40) nachgewiesen werden. Vorerst nehmen wir diese naheliegende Thatsache als erwiesen an.

a) Elasticitätsellipse rechteckiger Fächer.

Zunächst möge gezeigt werden, wie die Elasticitätsellipse für rechteckige Fächer gefunden wird.

Fig. 81.



Es bezeichne f die Grundlinie, h die Höhe des Rechteckes und s die Länge der Diagonale; F sei der Querschnitt eines Gurtstabes, F' derjenige einer Strebe. Es liegt auf der Hand, dass der Symmetrie wegen der Mittelpunkt der Ellipse mit dem Schnittpunkte beider Streben sich decken muss; wir haben daher nur nötig, die beiden Halbaxen i und i' zu berechnen.

Zu diesem Zwecke denken wir uns zuerst, das Fach werde durch eine Querkraft Q in Anspruch genommen, die durch den Mittelpunkt M geht. (Fig. 82). Dann verlängert sich die eine Strebe, die andere verkürzt sich und der Querschnitt CC bewegt sich, wenn der Schnitt DD festgehalten wird, lotrecht aufwärts. Ist σ' die spezifische Spannung der Streben, so ist deren Verlängerung beziehungsweise Verkürzung gleich $\frac{\sigma' s}{E}$. Diese Strecke verhält sich zu CC' wie h zu s; es ist daher

$$CC' = \frac{\sigma' s^2}{h E}.$$

Die Querkraft Q ist ferner gleich der Mittelkraft beider Strebenkräfte, somit, wie man leicht erkennt,

$$Q = \frac{2\, F'\, \sigma'\, h}{s}.$$

Es folgt daher

$$C\,C' = \frac{Q\, s^3}{2\, F'\, h^2\, E}.$$

Nach der Theorie der Elasticitätsellipse ist aber die Verschiebung $C\,C' = Q\,.\,G\,.\,i^2$, wenn mit G das »elastische Gewicht« des Faches bezeichnet wird. Setzt man dieses Gewicht für das ganze Fach

Fig. 82.

$$G = \frac{2\, f}{F\, h^2\, E}$$

(vgl. S. 115), so ergibt sich

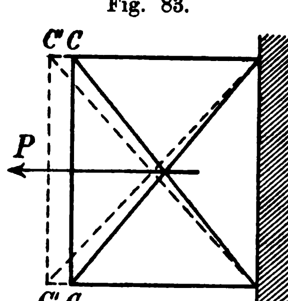
$$i = {}^1/_2\, f \sqrt{\frac{F\, s^3}{F'\, f^3}}.$$

Wie es sein muss, ist dieser Wert halb so gross als der auf der S. 124 berechnete.

Wir denken uns zweitens, das Fach werde durch eine Längskraft P in Anspruch genommen. (Fig. 83). Dann verlängern sich sowohl Streckbäume als Streben und der Querschnitt C verschiebt sich, wenn $D\ D$ festgehalten wird, parallel zu sich selbst nach links.

Bedeutet σ die spezifische Spannung der Gurtungen und σ' diejenige der Streben, so verlängern sich jene um die Strecke $\frac{\sigma\, f}{E}$ und diese um die Strecke $\frac{\sigma'\, s}{E}$. Der Zusammenhang, in welchem die 4 Stäbe stehen verlangt, dass sich verhält

Fig. 83.



$$\frac{\sigma\, f}{E} : \frac{\sigma'\, s}{E} = s : f,$$

woraus folgt

$$\sigma' = \frac{\sigma\, f^2}{s^2}.$$

Es ist ferner einleuchtend, dass die Gurtungskräfte und die wag-

rechten Seitenkräfte der Strebenkräfte zusammen gleich P sein müssen; daraus folgt

$$P = 2\,F\,\sigma + \frac{2\,F'\,\sigma'\,f}{s} = 2\,\sigma\Big(F' + \frac{F'\,f^3}{s^3}\Big).$$

Die wagrechte Bewegung des Querschnittes C ist somit

$$C\,C' = \frac{\sigma\,f}{E} = \frac{P\,f\,s^3}{2\,(F\,s^3 + F'\,f^3)\,E}.$$

Dieser Wert muss aber gleich $P.G.i'^2$ sein, so dass sich

$$i' = {}^1/_2\,h\sqrt{\frac{F\,s^3}{F\,s^3 + F'\,f^3}}$$

ergibt.

Handelt es sich um die Ermittelung der elastischen Einsenkung eines Fachwerkes unter dem Einflusse lotrechter Belastung, so ist die Berechnung von i' überflüssig.

Bei ungleichen Querschnittsflächen der Streckbäume und Streben führt man Mittelwerte in die Formeln ein.

In diesen Rechnungen ist vorausgesetzt worden, dass die Pfosten CC und DD in ihrer Länge unverändert bleiben. Das ist im Allgemeinen nicht der Fall; doch sind die Längenänderungen der Pfosten bei Fachwerken mit gekreuzten Streben stets klein, weil ihre Querschnitte gegenüber den in ihnen auftretenden Kräften meistens übermässig gross gewählt werden. Ueberdies üben diese Aenderungen, selbst wenn sie bedeutend wären, auf die Formänderung des ganzen Fachwerkes nur geringen Einfluss aus. Ihre Vernachlässigung ist daher gestattet, sogar dann, wenn die Pfosten ganz fehlen.

b) Elasticitätsellipse trapezförmiger Fächer.

Bei gekrümmter Gurtung ist die genaue Bestimmung der Elasticitätsellipsen der einzelnen Fächer schwieriger, weil die Ellipsen hier schief stehen und ihre Mittelpunkte nicht von vorn herein bekannt sind. In der Nummer 40 ist der einzuschlagende genaue Weg angegeben. In den meisten Fällen genügt indessen das folgende angenäherte Verfahren:

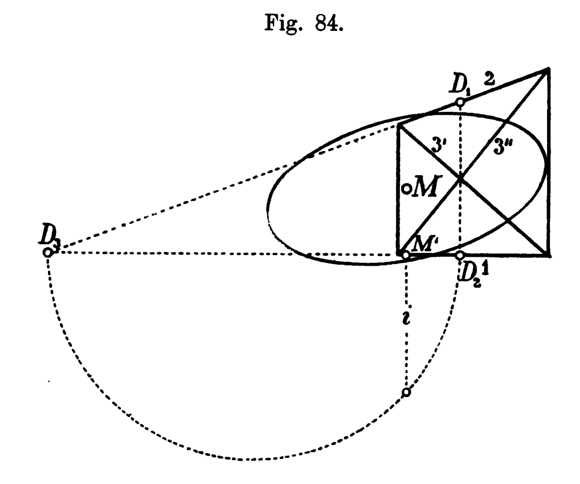
Man bestimmt (Fig. 84) die Drehpunkte D_1 und D_2 der beiden Gurtungsstäbe, indem man durch den Kreuzungspunkt der Streben eine Parallele zu den Pfosten zieht (vgl. S. 141 und Fig. 71), und berechnet für diese Punkte die elastischen Gewichte der Gurtungsstäbe. Die Drehpunkte der beiden Streben fallen nach D_3. Man berechnet sowohl für 3′ als auch für 3″ das elastische Gewicht und

überträgt auf den Punkt D_3 die **Hälfte** des arithmetischen Mittels aus beiden Gewichten.

Endlich addirt man die drei in D_1, D_2 und D_3 befindlichen Gewichte und zeichnet zugleich deren Centralellipse. (Vgl. Schweiz. Bauztg. vom 24. Aug. 1889).

Ein Vergleich mit dem genaueren Verfahren der Nummer 40 zeigt, dass dieser angenäherte Weg nahezu richtige Ergebnisse liefert.

Fig. 84.



Handelt es sich um die Ermittelung der Durchbiegungen bei lotrechter Belastung, so braucht man blos die wagrechte Ausdehnung i der Ellipse zu kennen. Man vereinigt zu diesem Zwecke die Gewichte beider Gurtungen in D_2, bestimmt den Schwerpunkt M' von D_2 und D_3 und zeichnet wie früher (S. 122) einen Halbkreis.

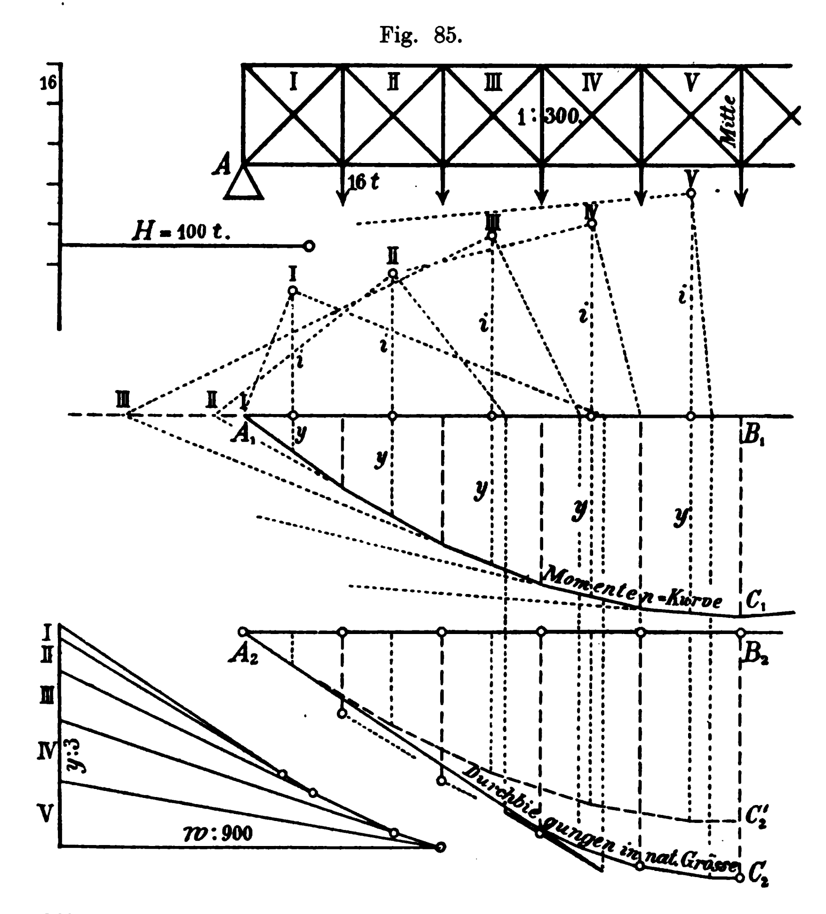
Fachwerke mit gekreuzten Streben ohne Pfosten behandelt man am einfachsten wie solche mit Pfosten. Solange es sich blos um lotrechte Einsenkungen handelt, begeht man dabei nur einen geringen Fehler.

Etwas mehr Mühe verursachen die zweiteiligen **Fachwerke mit einseitig geneigten Streben.** Am besten fasst man je zwei sich kreuzende Streben und die beiden eingeschlossenen Gurtstäbe als »Fach« auf und bestimmt die Ellipse nach den soeben für trapezförmige Fächer angegebenen Regeln, wobei man für Parallelträger die Formeln auf den Seiten 163 und 164 mit zu Rate zieht. Die Ellipse steht hier in allen Fällen, selbst bei parallelen Gurtungen, schief.

39. Durchbiegung eines statisch unbestimmten Parallelträgers.

Gar einfach gestaltet sich die Bestimmung der Formänderung eines Fachwerkes, wenn man nur nach dessen Einsenkungen bei lotrechter Belastung frägt; denn in diesem Falle kommen nur die wagrechten Halbmesser der Ellipsen in Betracht und das Verfahren

Fig. 85.



schliesst sich ganz demjenigen an, welches bei der Construction der elastischen Linie wagrechter Balken eingeschlagen wird. (Vgl. den I. Teil dieses Werkes, Nr. 35 und 36.)

Wir erläutern den einzuschlagenden Weg am besten an einem Beispiele.

Es sei die Durchbiegung des in der Figur 85 dargestellten Parallelträgers von 40 *m* Spannweite und 4 *m* Höhe zu zeichnen. Die Belastung betrage 16 *t* auf jeden Knotenpunkt.

Für diese Belastung ist zunächst ein Kräftepolygon mit der Polweite $H = 100\ t$ und dazu ein Seilpolygon (die Momentenkurve) $A_1\ C_1$ mit der Schlusslinie $A_1\ B_1$ gezeichnet worden. (Kräftemassstab 1 *mm* = 3 *t*.)

Die Ordinaten y der Momentenfläche, jeweilen unter den Fachmitten abgegriffen, bilden das zweite Kräftepolygon (links unten); um Platz zu sparen, haben wir diese Ordinaten durch 3 geteilt.

Die Querschnittsflächen der Streckbäume und Streben sind in nachfolgender Tabelle angegeben. Sie sind für obere und untere Gurtung, für Zug- und Druckstrebe nicht ganz gleich; wir haben daher je das arithmetische Mittel von zwei zusammengehörigen Werten in die Rechnung eingeführt. Die achte Zahlenreihe enthält die elastischen Gewichte der einzelnen Fächer, berechnet nach der Formel (S. 163)

$$G = \frac{2\,f}{F\,h^2\,E}$$

oder für $f = 4\ m$, $h = 4\ m$, $E = 20\,000\,000\ t$ (auf den Quadratmeter bezogen)

$$G = \frac{1}{40\,000\,000\ F}.$$

In der folgenden Zahlenreihe stehen die reciproken Werte von G, geteilt durch H, also die Längen

$$w = \frac{1}{G\,H} = 400\,000\ F.$$

Diese bilden die Polweiten des zweiten Kräftepolygons. (Vgl. Nr 31 und Fig. 61). Sie wurden jedoch, da sie für die Zeichnung viel zu gross wären, durch 900 geteilt. Die Zeichnung des Kräftepolygons unterliegt hiernach keiner Schwierigkeit mehr.

In der letzten Zahlenreihe stehen die Strecken i, berechnet nach der Formel (S. 163)

$$i = \tfrac{1}{2} f \sqrt{\frac{F\,s^3}{F'\,f^3}}$$

oder für $f = 4\ m$ und $s = 5{,}657\ m$

$$i = 3{,}363 \sqrt{\frac{F}{F'}}$$

Fach	Untere Gurtung	Obere Gurtung	Mittel F	Zug-strebe	Druck-strebe	Mittel F'	Gewichte $10^9 . G$	Pol-weiten w	Ellipsen-halbaxen i
	m^2	m^2	m^2	m^2	m^2	m^2		m	m
I	0,0183	0,0219	0,0201	0,0084	0,0095	0,0090	1244	8040	5,0
II	0,0211	0,0247	0,0229	0,0073	0,0085	0,0079	1092	9160	5,7
III	0,0284	0,0320	0,0302	0,0060	0,0072	0,0066	828	12080	7,2
IV	0,0327	0,0363	0,0345	0,0060	0,0072	0,0066	725	13800	7,7
V	0,0327	0,0363	0,0345	0,0049	0,0049	0,0049	725	13800	8,9

Die i dienen dazu, die Antipole der Querkräfte und damit die Angriffspunkte der Kräfte des zweiten Seilpolygons zu bestimmen. Man trägt zu diesem Zwecke die Strecken i von der Schlusslinie $A_1 B_1$ aus lotrecht auf und zwar in den Fachmitten; dann verlängert man, um die Lage der Querkräfte zu finden, die Seiten des Polygons $A_1 C_1$ nach links, bis sie die Schlusslinie schneiden, und zeichnet von diesen Schnittpunkten (I, II ...) aus rechtwinklige Dreiecke mit den Höhen i. Dadurch werden die Verticalen gefunden, in denen die Kräfte des Seilpolygons $A_2 C_2$ wirken.

Dieses zweite Seilpolygon erhält in unserem Beispiele eine teilweise verschlungene Gestalt; seine Herstellung verursacht jedoch durchaus keine Schwierigkeit. Die Punkte, in denen die Seiten des Polygons die Pfostenlinien treffen, geben die Einsenkungen des Fachwerkes an; sie sind durch kleine Ringe hervorgehoben.

Da die Zeichnung im Massstab 1 : 300 ausgeführt, die Momentenordinaten durch 3 und die zweiten Polweiten durch 900 geteilt wurden, so stellt die Figur die Einsenkungen in natürlicher Grösse dar.

Die Durchbiegung in der Mitte beträgt 32,8 *mm*.

In der Nummer 48 haben wir bei Besprechung der secundären Spannungen den nämlichen Träger mit derselben Belastung als Beispiel behandelt und bei dieser Gelegenheit die Winkeländerungen berechnet, welche infolge der Längenänderung der Stäbe entstehen; bestimmt man hieraus die Durchbiegung in der Mitte, so findet man 33,0 *mm*. Die Uebereinstimmung dieses genauen Wertes mit obigem ist praktisch gesprochen eine vollkommene; man erkennt hieraus, dass die Vereinfachungen und Vernachlässigungen, welche wir uns erlaubt haben, wenigstens bei Parallelträgern gestattet sind.

Um zu sehen, welchen Anteil die Streben an der Grösse der Durchbiegungen nehmen, braucht man blos die F'' unendlich gross, also die i gleich null zu setzen; die Kräfte des zweiten Seilpolygons fallen dann in die Fachmitten. Wir haben auch für diesen Fall das zweite Polygon gezeichnet ($A_2\,C_2'$). Die Durchbiegung ergibt sich hier gleich 25,2 *mm*, also fast um ein Viertel (23 %) kleiner als vorhin. In der Praxis dürfte dieser Unterschied kaum zu vernachlässigen sein.

Man erkennt hieraus zugleich, dass die Verschiebung der Kräfte von den Fachmitten nach den Antipolen dem Einfluss entspricht, welchen die Längenänderungen der Streben auf die Durchbiegung ausüben.

Berechnet man die Einsenkung nach der vielfach in Gebrauch stehenden Formel

$$e = \frac{5\,p\,l^4}{384\,J\,E},$$

so findet man für $p = 4\,t, l = 40\ m, E = 20\,000\,000\,t$ und $J = \frac{1}{2} \,.\, 0{,}0345 \,.\, 4^2 = 0{,}276\ m^4$

$$e = 0{,}024\ m,$$

also ebenfalls einen viel zu geringen Wert.

40. Genaue Elasticitätsellipse eines statisch unbestimmten Faches.

Hauptsächlich des theoretischen Interesses wegen möge zum Schluss noch eine sorgfältigere Studie über die Formänderung eines statisch unbestimmten Faches folgen.

Denkt man sich (Fig. 86) den Stab 6 beseitigt, so lässt sich nach den Entwicklungen des vorhergehenden Kapitels (Nr. 28) für jeden Stab ein Drehpunkt angeben und ein „Gewicht“ berechnen nach der Formel

$$G = \frac{s}{a^2\,F\,E}.$$

Belastet man sodann die Drehpunkte mit diesen Gewichten, so erhält man durch Vereinigung derselben die Elasticitätsellipse der 5 Stäbe.

In der Figur 86 sind die Punkte D_1 bis D_5 die Drehpunkte der fünf ersten Stäbe; die ausgezogene Ellipse ist ihre Elasticitätsellipse, A der Antipol von R und A' derjenige des sechsten Stabes.

Fehlt dieser letztere, so verschiebt sich unter dem Einflusse von R der Punkt V in der Richtung $U\,V$ um die Strecke $R\,C_{1-5}$, worin C_{1-5} das Centrifugalmoment der Gewichte 1 bis 5 in Bezug auf R und $U\,V$ bedeutet. Der Stab 6 tritt jedoch dieser Verschiebung entgegen; er erleidet eine Spannung S_6, welche in der entgegengesetzten Richtung die Verschiebung $S_6\,J_{1-5}$ bewirkt, unter J_{1-5} das Trägheitsmoment der fünf Gewichte in Bezug auf $U\,V$ verstanden. Die Differenz beider Verschiebungen muss gleich der Verlängerung

$\frac{S_6 s_6}{F_6 E}$ des sechsten Stabes sein. Es folgt daher

$$R\, C_{1-5} - S_6\, J_{1-5} = \frac{S_6\, s_6}{F_6\, E}.$$

Der Drehpunkt des sechsten Stabes liegt, wenn man die Diagonale 5 entfernt denkt, in D_5 und sein Gewicht ist $\frac{s_6}{a_6^2\, F_6 \cdot E}$; setzt man dieses gleich G_6, so ist $\frac{s_6}{F_6\, E}$ das Trägheitsmoment dieses Gewichtes bezüglich $U\, V$. Bezeichnen wir es mit J_6 und $J_{1-5} + J_6$ mit J_{1-6}, so wird einfacher

$$R\, C_{1-5} = S_6\, J_{1-6}.$$

Nach der Theorie der Centralellipse lässt sich auch

$$C_{1-5} = G_{1-5}\, m\, r'$$

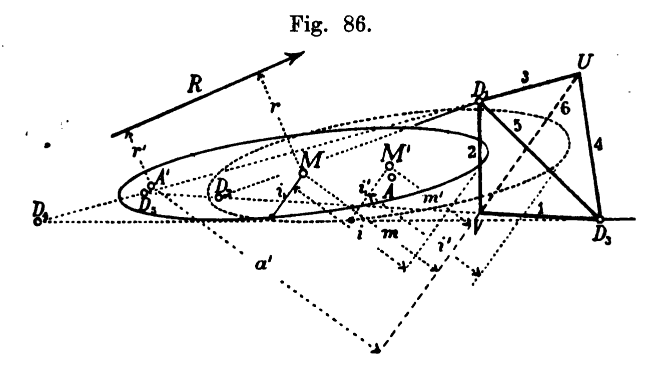
setzen, woraus folgt

$$S_6 = \frac{R\, G_{1-5}\, m\, r'}{J_{1-6}}.$$

Man sieht hieraus, dass die Kraft S_6 dem Momente der äussern Kraft hinsichtlich des Antipoles A' proportional ist. Sie verschwindet, wenn R durch diesen Antipol geht.

Hat man auf diese Weise die im sechsten Stabe herrschende Kraft

Fig. 86.



bestimmt, so lassen sich auch die übrigen Kräfte leicht ermitteln.

Dieses Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte in einem statisch unbestimmten Fache mag interessant sein; aber in der Anwendung ist es zu umständlich, da die Berechnung oder Construction der Elasticitätsellipse, bezw. der Werte C und J viel zu viel Arbeit verursacht. Dazu kommt, dass die äussere Kraft R im Allgemeinen nicht für alle sechs Stäbe die nämliche bleibt. Zur Ermittelung der Stabkräfte eignet sich daher diese Betrachtung keineswegs, wohl aber zur Bestimmung der Formänderung des Faches.

Die Kraft R bewirkt wie bekannt eine Drehung um ihren Antipol A, deren Mass gleich $R\, G_{1-5}\, r$ ist. (Vgl. Nr. 29). Für S_6 dagegen liegt der Drehpunkt in A' und der Drehungswinkel ist gleich $S_6\, G_{1-5}\, m = \frac{R\, G_{1-5}^2\, m^2\, r'}{J_{1-6}}$. Dabei drehen die beiden Kräfte stets in entgegengesetzter Richtung, wie es nicht anders sein kann, da jeder neu hinzutretende Stab die Formänderung

abschwächt. Die Gesamtdrehung wird daher gefunden, wenn man in A' das Gewicht

$$G' = \frac{G^2_{1-5}\, m^2}{J_{1-6}} = \frac{(G_{1-5}\, m)^2}{G_{1-5}\, ma' + (s_6 : F_6\, E)}$$

mit negativem Zeichen concentrirt denkt und dieses Gewicht zu dem Gewichte G_{1-5} unter Berücksichtigung der Ellipse hinzufügt.

Man erhält dabei eine neue, in der Figur 86 punktirt gezeichnete Ellipse, welche, mit dem Gewichte

$$G = G_{1-5} - G'$$

behaftet, an Stelle der früheren tritt und wie jede andere Elasticitätsellipse die Formänderungen abzuleiten gestattet, die sich unter dem Einfluss einer äussern Kraft R einstellen. —

Stossen mehrere Fächer mit Kreuzstreben aneinander, so stellt sich eine neue Schwierigkeit ein. Da alsdann je zwei Fächer einen Stab gemeinschaftlich besitzen, so können ihre Formänderungen nicht unabhängig voneinander verfolgt werden. Will man diese Aenderungen trotzdem mit Hülfe der elastischen Gewichte bestimmen, so bleibt nichts anderes übrig, als, wie es in der Nummer 38 geschehen ist, die Pfostenquerschnitte unendlich gross zu setzen. In Fällen, wo diese Annahme durchaus unzulässig ist, muss man eines der drei ersten, auf der Seite 161 genannten Verfahren einschlagen.

Fünftes Kapitel.

Die secundären Spannungen.

41. Entstehung der secundären Spannungen.

Unter secundären Spannungen versteht man in der Fachwerkstheorie gewöhnlich diejenigen inneren Kräfte, welche aus der starren Verbindung der Knotenpunkte entspringen. Die Ermittlung der Stabkräfte aus den äusseren Belastungen, wie sie im ersten Kapitel beschrieben worden ist, gründet sich auf die Annahme, dass die Stäbe sich an den Knotenpunkten um reibungslose Gelenke drehen können. Die unmittelbare Folge dieser Annahme ist die, dass die Stabkräfte durch die Knotenmittelpunkte gehen müssen, wodurch ihre Lage von vornherein genau gegeben ist. (Vgl. Nr. 1). Diese Voraussetzung wird aber in der Wirklichkeit niemals erfüllt; selbst

bei gelenkartigen Verbindungen treten stets Reibungskräfte auf, infolge deren die Stabkraft eine mehr oder weniger excentrische Lage annimmt.

Der Gang der Berechnung der Stabkräfte, welcher im ersten Kapitel erklärt und im zweiten auf verschiedene Beispiele angewandt worden ist, liefert aus diesem Grunde streng genommen nur angenähert richtige Resultate; er lehrt uns die »primären« oder »Hauptspannungen« finden. In dem vorliegenden Kapitel soll nun gezeigt werden, auf welche Weise die »secundären« oder die »Nebenspannungen« gefunden werden.

Dass sich bei vernieteten Knotenpunkten secundäre Spannungen einstellen müssen, lässt sich leicht folgendermassen erkennen:

Wird ein aus drei Stäben zusammengesetztes Dreieck belastet, so fallen die inneren Kräfte nur dann genau mit den Stabaxen zusammen, wenn sie in jedem Stabe die gleiche spezifische Spannung erzeugen. Denn dann verlängern oder verkürzen sich die Stäbe im gleichen Verhältnisse, das Dreieck bleibt sich ähnlich, die Winkel bleiben dieselben. Weichen aber die spezifischen Spannungen von einander ab, was fast ohne Ausnahme der Fall ist, so haben die Stäbe das Bestreben, ihre Winkel zu ändern; da nun diese Aenderungen infolge der starren Vernietung nicht möglich sind, so müssen die Stäbe eine mehr oder weniger gebogene Form annehmen. Diese Biegung tritt aber wiederum nur dann ein, wenn die Stabkräfte aus der axialen Lage heraustreten.

In einem belasteten Fachwerke bilden daher die Stabkräfte ein Netz, das sich mit demjenigen der Stabaxen nicht genau deckt; jede Kraft erscheint ein wenig aus der Stabaxe herausgerückt. An den Knotenpunkten herrscht zwar unter den daselbst zusammentreffenden Kräften nach wie vor Gleichgewicht; allein die Richtungslinien dieser Kräfte schneiden sich nicht mehr in demselben Punkte wie die Stabaxen. Bei mehr als drei Kräften brauchen sich die Kraftrichtungen überhaupt nicht mehr in ein und demselben Punkte zu schneiden. —

Im weitern Sinne kann man in der Fachwerktheorie unter secundären Spannungen alle diejenigen verstehen, welche ausser den eben genannten primären Spannungen auftreten. Schon die statische Unbestimmtheit eines Fachwerkes bildet eine Quelle von Nebenspannungen. Ebenso werden die Spannungsverhältnisse verändert durch mangelhafte Centrirung der Stäbe, durch seitliche Befestigung der Streben an den Gurtungen, durch ungünstige Einzelverbindungen, durch plötzliche Querschnittsänderungen, durch die Verbiegung der Querträger u. s. w. Alle diese Einflüsse fordern zu genauerer Prüfung auf, und wer sich von der Wirksamkeit seiner eisernen Fachwerke ein vollkommen richtiges Bild verschaffen will, hat alle Hände voll zu thun. Im vorliegenden Kapitel sollen jedoch in erster Linie diejenigen Spannungen mit dem Namen „secundäre" belegt werden, welche aus den starren Knotenpunktsverbindungen entspringen. Mit der Bestimmung dieser Spannungen lässt

sich dann auch die Untersuchung der Wirkung einer excentrischen Befestigung der Stäbe und einiger anderer Umstände leicht verbinden.

42. Bestimmung der secundären Spannungen.

Um die Grösse der in einem gegebenen Fachwerke auftretenden secundären Spannungen zu bestimmen, schlägt man folgenden Weg ein.

Man berechnet zuerst die Stabkräfte unter der Annahme, dass die Stäbe durch reibungslose Gelenke verbunden seien. Dann ermittelt man, indem man die Kräfte durch die Stabquerschnitte dividirt, die spezifischen Hauptspannungen und aus diesen die kleinen Aenderungen, welche die von den Stäben eingeschlossenen Winkel erführen, wenn sich die Stäbe ohne Reibung drehen könnten. Hierauf betrachtet man die Biegungsmomente, welche aus den starren Verbindungen der Stabenden entspringen, als Unbekannte und bestimmt deren Grösse derart, dass infolge der Verbiegung, welche die Stäbe durch diese Momente erleiden, die Winkel wieder ihre frühere Grösse annehmen. Kennt man die Grösse der an den Stabenden wirkenden Biegungsmomente, so findet man schliesslich die gesuchten Nebenspannungen nach bekannten Formeln der Festigkeitslehre.

Treffen an einem Knotenpunkte n Stäbe zusammen, so haben die n Biegungsmomente an dieser Stelle $n-1$ Winkeländerungen zu befriedigen; ausserdem muss die Summe der Momente, da das Gleichgewicht nicht gestört werden darf, gleich null sein. Die Zahl der unbekannten Grössen ist also stets gleich der Zahl der gegebenen Bedingungen.

Nach diesen Grundgedanken hat Herr Prof. *H. Manderla* in München die spröde Aufgabe bewältigt (s. *Försters* Allgemeine Bauzeitung 1880) und ein Verfahren entwickelt, nach welchem die secundären Spannungen an der Hand von Formeln zwar nicht direkt, doch durch rasche Annäherung berechnet werden können. Nachfolgend soll dieselbe Aufgabe auf dem Wege des graphischen Rechnens gelöst werden.

Die Biegungsmomente entstehen, wie oben bemerkt, dadurch, dass die Stabkräfte um ein weniges aus den Stabaxen heraustreten. Im Allgemeinen tritt hierbei zu der Stabkraft eine kleine Zusatzkraft, und man sollte streng genommen nicht nur die verbiegende Wirkung dieser Zusatzkraft, sondern auch die von ihr bewirkte axiale Verlängerung und die Folgen der transver-

salen Spannungen berücksichtigen. Doch sind die letzteren Faktoren höchstens bei sehr breiten Stäben von Bedeutung und können in den praktisch vorkommenden Fällen vernachlässigt werden. Uebrigens steht es uns frei, mit Hülfe der berechneten Momente die veränderte Lage der Stabkräfte zu bestimmen und hierauf fussend die ganze Rechnung zu wiederholen.

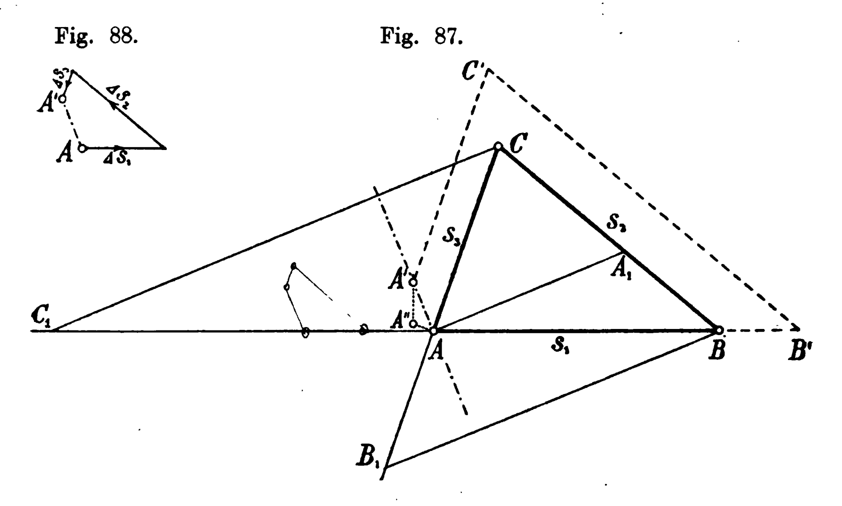
Es leuchtet ein, dass die Berechnung der Nebenspannungen nur dann durchgeführt werden kann, wenn man die Querschnittsabmessungen der Fachwerkstäbe bereits kennt. Man wird also im Allgemeinen diese Abmessungen zuerst unabhängig von den Nebenspannungen bestimmen müssen und sie nachträglich, wenn es sich nötig erweist, abändern.

43. Die Winkeländerungen im Stabdreiecke.

Die Winkeländerungen in einem von drei elastischen Stäben gebildeten Dreiecke können sowohl aus den Stabverlängerungen Δs als aus den spezifischen Spannungen σ abgeleitet werden.

Sind die elastischen Verlängerungen, beziehungsweise Verkürzungen der drei Stäbe bekannt, so denke man sich (Fig. 87) das

Fig. 88. Fig. 87.



Dreieck bei A durchgeschnitten, halte das linke Ende des Stabes $A\,B$ fest und sehe nach, wie sich das Dreieck verändert, wenn die Winkel unverändert bleiben. Der Punkt B gelange hierbei nach B', C nach C' und A nach A'. Die Strecke $A\,A'$ findet man einfach durch Aneinanderreihen der drei Strecken Δs (Fig. 88).

Nun soll durch Drehungen in B und C der Punkt A' wieder nach A zurückkehren. Eine Drehung um B verschiebt den Punkt

A' (da alle Bewegungen unendlich klein gedacht werden können) in einer Senkrechten zu AB, eine Drehung um C in einer Senkrechten zu AC. Durch erstere gelangt A' nach A'', durch letztere nach A. Der Drehungswinkel bei B ist daher

$$\delta_b = \frac{A' A''}{s_1}.$$

Zieht man nun durch B eine Senkrechte zu AA', bis sie AC in B_1 schneidet, so ist das Dreieck ABB_1 dem Dreieck $AA'A''$ ähnlich; es verhält sich daher $A'A'' : AA' = s_1 : BB_1$; folglich ist

$$\delta_b = \frac{A A'}{B B_1}.$$

Auf demselben Wege ergeben sich die beiden andern Winkeländerungen

$$\delta_a = \frac{A A'}{A A_1} \text{ und } \delta_c = \frac{A A'}{C C_1}.$$

Es folgt hieraus die Regel:

Um die Winkeländerungen im Stabdreiecke ABC zu finden, bilde man durch geometrisches Aneinanderfügen der drei Stabverlängerungen die Verschiebungssumme AA', ziehe durch die Ecken des Dreieckes Senkrechte zu der Verschiebungsrichtung, bis sie die gegenüberliegenden Seiten schneiden, und dividire hierauf die Verschiebungssumme durch die Längen dieser drei Senkrechten.

Projicirt man (Fig. 87) s_2 auf die Richtung von AA', so ist die Projection, multiplicirt mit BB_1, gleich dem doppelten Flächeninhalte des Dreieckes ABC. Man kann also auch sagen: Um die Winkeländerungen zu finden, multiplicire man die Verschiebungssumme mit den Projectionen der Dreiecksseiten auf die Verschiebungsrichtung und dividire die Produkte durch den doppelten Flächeninhalt des Dreieckes. —

Sind nicht die Stabverlängerungen Δs, sondern die spezifischen Spannungen σ der drei Stäbe bekannt, so verfährt man bei der Berechnung der Winkeländerungen folgendermassen:

Es verlängere sich (Fig. 89) zunächst nur der Stab AB; dann verschiebt sich der Punkt A (wenn man wie vorhin das linke Ende von AB festhält) nach A' um die Strecke Δs_1. Soll diese Bewegung rückgängig gemacht werden, so müssen sich die

Stäbe in B und C wiederum ein wenig drehen. Dabei verschiebt sich wie oben A' zuerst in einer Senkrechten zu $A\,B$ bis A'' und dann in einer Senkrechten zu $A\,C$ bis A. Die Winkelzunahme bei B ist demnach

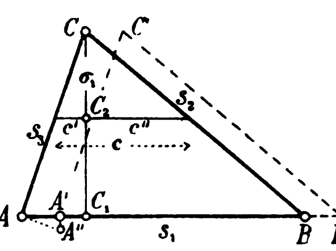
$$\delta_b = -\frac{A'\,A''}{s_1}.$$

Da die Dreiecke $A\,A'\,A''$ und $A\,C\,C_1$ einander ähnlich sind, so verhält sich $A'\,A'' : A\,A' = A\,C_1 : C\,C_1$; folglich ist

$$\delta_b = -\frac{A\,A'\,.\,A\,C_1}{s_1\,.\,C\,C_1} = -\frac{\varDelta s_1\,.\,A\,C_1}{s_1\,.\,C\,C_1} = -\frac{\sigma_1\,.\,A\,C_1}{E\,.\,C\,C_1}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht zeichnen. Macht man nämlich in der Figur in irgend einem Massstabe $C\,C_2 = \sigma_1$ und legt durch C_2 eine Parallele zu $A\,B$, so ist

Fig. 89.



$$\delta_b = -\frac{c'}{E}.$$

In gleicher Weise findet sich durch Vertauschung von B mit A die Aenderung, welche der Winkel A erfährt,

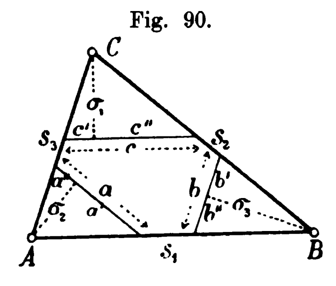
$$\delta_a = -\frac{c''}{E}$$

und hiernach die Winkeländerung in C

$$\delta_c = -\delta_b - \delta_a = +\frac{c' + c''}{E} = \frac{c}{E}.$$

Aendern nun alle drei Stäbe ihre Länge, so gelangt man durch folgende geometrische Construction zu den drei Winkeländerungen:

Fig. 90.



Man zieht im Dreieck die drei Höhenperpendikel (Fig. 90), trägt auf denselben von den Ecken aus die σ der gegenüber liegenden Seiten auf und zieht durch die erhaltenen Punkte Parallelen zu diesen Seiten; dann sind die drei Winkeländerungen

$$E\,\delta_a = a - b' - c''$$
$$E\,\delta_b = b - c' - a''$$
$$E\,\delta_c = c - a' - b''.$$

Mit dem Zirkel lassen sich diese Strecken leicht zusammenfügen. Die beiden letzten Glieder in obigen Summen stellen stets diejenigen Strecken dar, welche an die zum ersten Gliede parallele Dreiecksseite anstossen. Es ist daher ein Irrtum nicht wohl möglich; nur muss auf das Zeichen von σ geachtet werden, was vielleicht dadurch am besten geschieht, dass man die den negativen σ entsprechenden Linien mit anderer Farbe auszieht.

Will man die δ nicht geometrisch, sondern rechnerisch bestimmen, so benütze man die folgenden Formeln, welche sich aus der Figur leicht herausschreiben lassen:

$$E\,\delta_a = (\sigma_1 - \sigma_2)\ cotg\ \gamma + (\sigma_1 - \sigma_3)\ cotg\ \beta$$
$$E\,\delta_b = (\sigma_2 - \sigma_3)\ cotg\ \alpha + (\sigma_2 - \sigma_1)\ cotg\ \gamma$$
$$E\,\delta_c = (\sigma_3 - \sigma_1)\ cotg\ \beta + (\sigma_3 - \sigma_2)\ cotg\ \alpha.$$

Ist das Dreieck rechtwinklig, so können die Werte $E\,\delta$ auf die folgende Weise bequem berechnet werden:

Man schreibt längs der Seiten des Dreieckes die Werte σ auf, bildet die Differenz von je zwei aufeinanderfolgenden σ, multiplicirt sie mit der Cotangente des eingeschlossenen Winkels und schreibt das Produkt in der betreffenden Ecke ein. Hierauf subtrahirt man, in der umgekehrten Richtung wandernd, je zwei aufeinanderfolgende Eckzahlen.

Fig. 91.

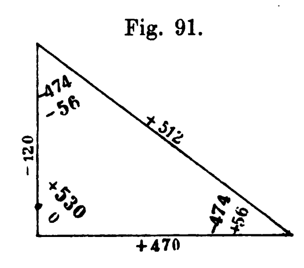


Fig. 92.

Die Fig. 91 zeigt ein Beispiel dieser Zahlenrechnung; die Katheten verhalten sich dabei wie 3 : 4; die stärker geschriebenen Zahlen sind die mit E multiplicirten Winkeländerungen.

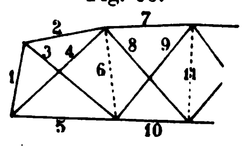
Sind die beiden Katheten gleich gross, mithin die spitzen Winkel gleich 45°, so rechnet man nach nebenstehendem Schema. —

Hat man ein Fachwerk mit gekreuzten Streben zu untersuchen, bei welchem einzelne oder auch sämtliche Pfosten (mit Ausnahme des ersten und letzten) fehlen, so kommt es zunächst darauf an, die relativen Längenänderungen, das heisst die ideellen Werte $\frac{\sigma}{E}$ für die fehlenden Stäbe zu bestimmen. Es kann dies auf zweierlei Weise geschehen. Entweder schreibt

man (Fig. 93) hinsichtlich der vier Eckwinkel des ersten Faches die Formeln für $E\delta$ auf und setzt deren Summe gleich Null. Dann erhält man eine Gleichung, in welcher nur σ_6 als Unbekannte vorkommt. Wiederholt man nach erfolgter Bestimmung von σ_6 dieselbe Rechnung für das zweite Fach, so findet man σ_{11} und so weiter von Fach zu Fach gehend sämtliche unbekannten Werte. Oder man zeichnet nach Anleitung der Fig. 80 (Seite 155) das Kräftediagramm des Fachwerkes und leitet aus der Bedingung, dass $\Sigma_1^6 (K \varDelta s)$ verschwinden muss, die Grösse $\varDelta s_6$ und aus dieser σ_6 ab; durch Wiederholung des Verfahrens findet man die übrigen unbekannten σ. Bei parallelen Gurtungen dürfte sich der erstere, bei gekrümmten der letztere Weg besser eignen.

Sind sodann die ideellen Werte σ für die fehlenden Glieder bekannt, so verursacht die Berechnung der Winkeländerungen keine Schwierigkeit mehr. —

Fig. 93.



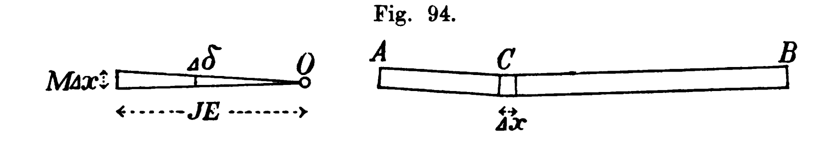
Kennt man für ein Fachwerk die Aenderungen, welche die von den Stäben eingeschlossenen Winkel bei irgend einer Belastung erfahren, so lässt sich hieraus, wie in der Nummer 27 (S. 110) gezeigt worden ist, auch die D u r c h b i e g u n g s k u r v e des Fachwerkes ableiten.

44. Die Ablenkungswinkel der Stabaxen.

In zweiter Linie muss der Zusammenhang zwischen den an den Stabenden auftretenden Biegungsmomenten und den Winkeln abgeleitet werden, welche die gebogene Stabaxe an ihren Endpunkten mit der geradlinigen Sehne bildet. Zu diesem Zwecke müssen wir die e l a s t i s c h e L i n i e d e s S t a b e s ins Auge fassen.

Es sei AB (Fig. 94) ein gerader, horizontaler Balken, auf

Fig. 94.



welchen beliebige Kräfte wirken. Das Biegungsmoment derjenigen Kräfte, welche ausserhalb des Querschnittes C auf den Balken einwirken, sei M. Dann herrscht nach bekannten Regeln der Festig-

keitslehre (I. Teil der »Anwendungen«, S. 58) in der untersten Kante des Querschnittes die Spannung

$$\sigma = \frac{M e}{J},$$

wenn die Entfernung dieser Kante vom Schwerpunkte mit e und das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes mit J bezeichnet wird. Ist diese Spannung eine Zugspannung, so wirkt in der oberen Kante eine Druckspannung, während die Spannung in der Schwerlinie gleich null ist. Infolge der Elasticität dehnt sich daher das Material in der untern Kante aus und zieht sich in der oberen zusammen. Legt man bei C im Abstande Δx voneinander zwei Querschnitte durch den Balken, so vollzieht der eine gegenüber dem andern eine kleine Drehung. Nennt man den Elasticitätsmodul des Materials E, so verlängert sich die untere Faser des Balkenelementes um die Strecke

$$\frac{\sigma}{E} \Delta x.$$

Dividirt man diese Strecke durch e, so bekommt man die Grösse obiger Drehung

$$\Delta \delta = \frac{\sigma \Delta x}{E e} = \frac{M \Delta x}{J E}.$$

Denken wir uns nun einen Augenblick, es sei nur das eine Element des Balkens elastisch, so wird der Stab an dieser Stelle eine ganz kleine Knickung annehmen. Wir können die geknickte Form der Stabaxe zeichnen, indem wir (Fig. 94) das Produkt $M \Delta x$ als senkrechte Kraft auftragen, im Abstand $J E$ einen Pol O wählen und parallel zu den Strahlen aus O die Linien $A C$ und $C B$ ziehen.

Aendern aber sämtliche Elemente infolge der Elasticität ihre Form, so müssen wir für jedes Element das nämliche thun; das heisst wir müssen für sämtliche Elemente die Produkte $M \Delta x$ als lotrechte Kräfte aneinander fügen und dazu mit Hülfe des Poles O ein Seilpolygon zeichnen.

In der Regel sind die Momente durch die sogenannte Momentenfläche gegeben; die Regel lautet somit (vgl. I. Teil, S. 165):

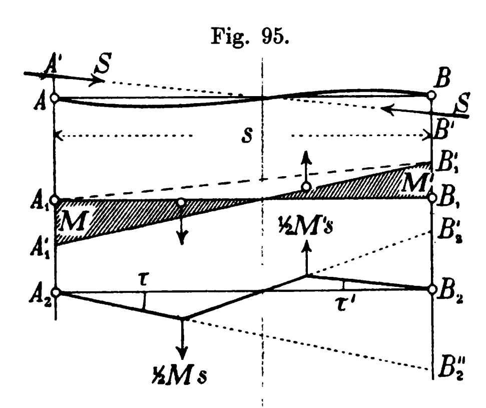
Um die elastische Linie eines Balkens zu erhalten, betrachte man dessen Momentenfläche als Belastungsfläche, teile sie in Streifen von der Breite Δx, trage die Produkte $M \Delta x$ als verticale Kräfte

auf und verbinde sie, das Produkt $J E$ als Polweite benützend, durch ein Seilpolygon.

Damit dieses Seilpolygon sich deutlich von der geraden Linie unterscheide, muss man es in verticaler Richtung stark verzerren man wählt zu diesem Zwecke nicht das ganze $J E$, sondern nur einen kleinen Teil davon als Polweite.

Im vorliegenden Falle handelt es sich nicht um den ganzen Verlauf der elastischen Linie eines Fachwerkstabes, sondern nur um die Richtung der Endtangenten. Es ist daher gestattet, die Momentenfläche auch in anderer Weise, als oben angegeben ist, einzuteilen. Wirkt beispielsweise (Fig. 95) die Stabkraft S in der Richtung $A' B'$, so wird die Momentenfläche die Form des überschlagenen Trapezes $A_1 A_1' B_1' B_1$ annehmen. Anstatt nun diese Fläche in Streifen zu teilen, betrachten wir sie als den Unterschied zweier Dreiecke $A_1 A_1' B_1'$ und $A_1 B_1 B_1'$, von welchen das eine positiven, das andere negativen Sinn hat. Sind M und M' die Biegungsmomente an den beiden Stabenden, so hat man daher, um die elastische Linie zu zeichnen, die Produkte $\frac{1}{2} M s$ und $\frac{1}{2} M' s$ als Kräfte aufzutragen. Die eine Kraft wirkt nach oben, die andere nach unten, und ihre Richtungslinien gehen durch die Schwerpunkte der beiden Dreiecke, teilen also die Entfernung s in drei gleiche Teile. Setzt man diese Kräfte zusammen, so entsteht das Seilpolygon $A_2 B_2$.

Fig. 95.



Für unsre späteren Zwecke ist es nötig, den Zusammenhang zwischen den Momenten M und den Ablenkungswinkeln τ durch Formeln auszudrücken.

Um diese Formeln zu finden, betrachten wir die Strecken $B_2 B_2'$ und $B_2' B_2''$ als statische Momente der beiden Kräfte; dann ist nach bekannten Regeln

$$B_2 B_2' = \frac{\frac{1}{2} M' s \cdot \frac{1}{3} s}{J E} \text{ und } B_2' B_2'' = \frac{\frac{1}{2} M s \cdot \frac{2}{3} s}{J E}.$$

Hieraus folgt ohne Schwierigkeit die Formel

$$\tau = \frac{B_2\ B_2''}{s} = \frac{(2\,M - M')\,s}{6\,J\,E}.$$

Vertauscht man die Zeichen, so bekommt man

$$\tau' = \frac{(2\,M' - M)\,s}{6\,J\,E}.$$

Wir nennen in der Folge die Momente positiv, wenn sie das Stabende im Sinne der Uhrzeiger nach rechts abbiegen. In der Figur 95 haben hiernach beide Momente positiven Sinn. Sie verleihen dem Stabe die Form eines **S**. Stäbe, welche die Form eines umgekehrten **S** besitzen, stehen dagegen unter dem Einflusse negativer Momente. Schneidet die Kraft S die Stabaxe nicht innerhalb, sondern ausserhalb der Strecke $A\,B$, so erfährt der Stab nur eine einfache Biegung; in diesem Falle ist das eine Moment positiv, das andere negativ.

Bei obiger Ableitung der Ausdrücke für τ und τ' haben wir wie bei allen auf elastische Formänderungen sich gründenden Entwickelungen vorausgesetzt, dass diese Formänderungen gegenüber den Dimensionen des Stabes verschwindend klein seien. Im vorliegenden Falle ist jedoch diese Annahme nicht ohne Weiteres zulässig. Infolge der Biegung, welche der Stab erfährt, ändern sich nämlich die Hebelarme der Stabkraft, und da diese Hebelarme selbst nur kleine Grössen sind, so dürfen deren Aenderungen nicht ohne Weiteres vernachlässigt werden.

Eine kleine Rechnung wird uns hierüber Klarheit verschaffen.

Bezeichnet man die laufenden Coordinaten der elastischen Linie bezogen auf A mit x und y, und das Moment im Punkte $(x\,y)$ mit M_x, so lautet die Differenzialgleichung der Kurve, die positiven y nach unten gerechnet,

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = -\frac{M_x}{J\,E}.$$

Denn aus obigen Betrachtungen über die Form der elastischen Linie ergibt sich deren Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\varDelta\,x}{\varDelta\,\delta} = \frac{J\,E}{M}$$

und da wir es hier mit einer stets flachen Kurve zu thun haben, dürfen wir genau genug

$$\frac{1}{\varrho} \text{ durch } -\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$$

ersetzen.

Lässt man jetzt in der Axe des Stabes $A\,B$ eine Druckkraft S und an den Endpunkten zugleich die Momente M und M' wirken, so ist für den Punkt $(x\,y)$

$$M_x = S\,y + \frac{M\,(s-x)}{s} - \frac{M'\,x}{s}.$$

Führt man diesen Wert in die Differentialgleichung ein, so bekommt man

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{S\, y}{JE} + \frac{(M + M')\, x - M s}{J E s}.$$

Die Integration führt zur Gleichung:

$$y = \frac{M}{S} \cos \frac{\alpha\, x}{s} - \frac{M \cos \alpha + M'}{S \sin \alpha} \sin \frac{\alpha\, x}{s} + \frac{(M + M')\, x - M s}{S\, s},$$

worin zur Abkürzung

$$\alpha \text{ für } \sqrt{\frac{S s^2}{JE}}$$

gesetzt ist. Die Integrationsconstanten sind so bestimmt, dass y für $x = o$ und für $x = s$ verschwindet.

Bildet man nun die erste Ableitung von y und setzt darin $x = o$, so erhält man den Ablenkungswinkel

$$\tau = - \frac{\alpha\, (M \cos \alpha + M')}{S\, s \sin \alpha} + \frac{M + M'}{S\, s}.$$

Entwickelt man $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ in Reihen, so folgt:

$$\tau = \frac{s\, (2\, \varkappa\, M - \varkappa'\, M')}{6\, JE}$$

$$\text{worin } \varkappa = 1 + \frac{\alpha^2}{15} + \frac{2\, \alpha^4}{315} + \frac{\alpha^6}{1575} + \ldots.$$

$$\text{und } \varkappa' = 1 + \frac{7\, \alpha^2}{60} + \frac{31\, \alpha^4}{2520} + \frac{127\, \alpha^6}{100800} + \ldots.$$

Um τ' zu finden, hat man M und M' zu vertauschen.

Wird der Stab $A\,B$ nicht auf Druck, sondern auf Zug in Anspruch genommen, so ändert man einfach das Zeichen von S, also dasjenige von α^2; die Ausdrücke für $\varkappa$ und $\varkappa'$ gelten daher auch für Zugstäbe, wenn man jedes zweite Glied negativ rechnet.

Man sieht, dass die genauen Formeln für $\alpha = 0$ (also für unendlich grosses Trägheitsmoment J) in die früheren Formeln (Seite 181) übergehen. Letztere sind daher um so ungenauer, je grösser α ist, das heisst je mehr J gegenüber s^2 abnimmt, mit andern Worten je schlanker die Stäbe sind.

Bei Druckstäben darf das Trägheitsmoment schon der Knickgefahr wegen nie unter eine gewisse Grenze sinken; α wird demzufolge selten grösser als 1,5 bis 2 ausfallen. Bei Zugstäben kommen dagegen höhere Werte von α leicht vor.

Nichts destoweniger wollen wir unsere Entwicklungen von diesem Umstande unabhängig weiter führen; in Anbetracht der Schwierigkeit der ganzen Aufgabe dürfte die Vernachlässigung desselben meistens gestattet sein.

Die folgende Tabelle kann gelegentlich Verwendung finden:

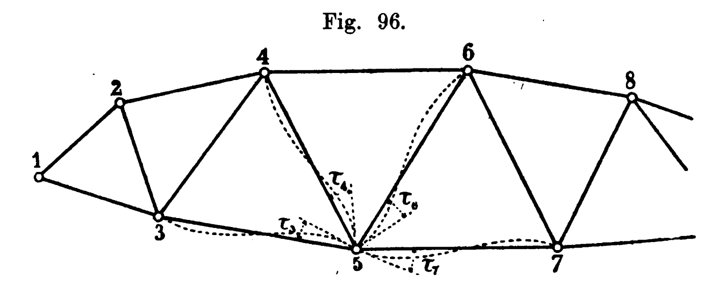
$\alpha^2 = S s^2 : J E$	Zugstäbe				Druckstäbe			
	x		x'		x		x'	
0,0	1,000		1,000		1,000		1,000	
0,1	0,993	7	0,988	12	1,007	7	1,012	12
0,2	0,987	6	0,977	11	1,013	6	1,023	11
0,3	0,981	6	0,966	11	1,021	8	1,036	13
0,4	0,974	7	0,955	11	1,028	7	1,049	13
0,5	0,969	5	0,945	10	1,035	7	1,061	12
0,6	0,962	7	0,934	11	1,042	7	1,074	13
0,7	0,956	6	0,924	10	1,050	8	1,088	14
0,8	0,951	5	0,914	10	1,057	7	1,102	14
0,9	0,945	6	0,905	9	1,066	9	1,115	13
1,0	0,939	6	0,895	10	1,074	8	1,130	15
1,5	0,912	27	0,849	46	1,117	43	1,208	78
2,0	0,888	24	0,807	42	1,165	48	1,295	87
2,5	0,865	23	0,769	38	1,219	54	1,395	100
3,0	0,844	21	0,735	34	1,282	63	1,510	115

45. Graphische Berechnung der secundären Spannungen.

Nach dem Vorangegangen ist es jetzt nicht schwer, die zur Berechnung der Nebenspannungen nötigen Bedingungsgleichungen aufzustellen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke einen beliebigen Knotenpunkt des Fachwerkes, zum Beispiel den Punkt 5 (Fig. 96), in

Fig. 96.



welchem sich vier Stäbe vereinigen. Wir nehmen an, diese Stäbe verbiegen sich sämtlich S-förmig und nennen die Ablenkungs-

winkel τ_3, τ_4, τ_6 und τ_7. Dann ist der von den geraden Sehnen 5 3 und 5 4 eingeschlossene Winkel offenbar um $\tau_3 - \tau_4$ grösser als der von den gebogenen Stäben eingeschlossene; letzterer ist aber der ursprüngliche, durch Vernietung unveränderlich gehaltene Winkel, ersterer dagegen der um δ grössere. Es ist daher

$$\delta_{3\cdot 4} = \tau_3 - \tau_4;$$

oder unter Benutzung des in der vorigen Nummer für τ abgeleiteten Ausdruckes

$$E\,\delta_{3\cdot 4} = \frac{s_3\,(2\,M_3 - M_3')}{6\,J_3} - \frac{s_4\,(2\,M_4 - M_4')}{6\,J_4}.$$

Hierin bezeichnen M_3 und M_4 die Momente am anliegenden Stabende, M_3' und M_4' diejenigen am abstehenden Ende.

Gleichartige Beziehungen ergeben sich für $\delta_{4\cdot 6}$ und $\delta_{6\cdot 7}$.

Das Gleichgewicht der am Knotenpunkte zusammenstossenden Kräfte verlangt ausserdem, dass die Summe der daselbst entstehenden Momente verschwinde; daraus ergibt sich die weitere Gleichung

$$M_3 + M_4 + M_6 + M_7 = 0.$$

Für unsere spätern Zwecke ist es vorteilhaft,

$$\frac{s\,M}{6\,J} = \mu$$

zu setzen, wobei μ eine Kraft pro Flächeneinheit darstellt, folglich in derselben Einheit wie σ und $E\,\delta$ gemessen wird. Dann schreiben sich obige Gleichungen wie folgt:

$$E\,\delta_{3\cdot 4} = (2\,\mu_3 - \mu_3') - (2\,\mu_4 - \mu_4')$$
$$E\,\delta_{4\cdot 6} = (2\,\mu_4 - \mu_4') - (2\,\mu_6 - \mu_6')$$
$$E\,\delta_{6\cdot 7} = (2\,\mu_6 - \mu_6') - (2\,\mu_7 - \mu_7').$$
$$\frac{J_3}{s_3}\,\mu_3 + \frac{J_4}{s_4}\,\mu_4 + \frac{J_6}{s_6}\,\mu_6 + \frac{J_7}{s_7}\,\mu_7 = 0.$$

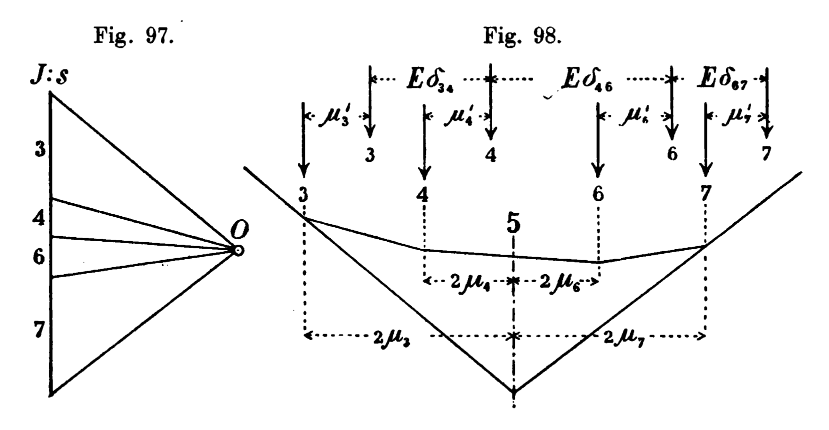
Aehnliche Gleichungen ergeben sich für jeden anderen Knotenpunkt und zwar stets so viele, als Stäbe in demselben zusammentreffen; die Gesamtsumme aller Gleichungen ist somit gleich der Anzahl sämtlicher Stabenden, also gerade so gross wie die Zahl der gesuchten Momente M.

Wir wiederholen, dass sich die μ ohne oberen Index stets auf das anliegende Stabende, die μ' auf das entfernte Ende beziehen. Es folgt hieraus, dass sämtliche in einem Fachwerk auftretenden μ auf zweierlei Art bezeichnet werden können; so ist zum Beispiel der Wert μ_4 für den Knotenpunkt 5 identisch mit dem Werte μ'_5 für den Knotenpunkt 4, und umgekehrt μ_4' für den Punkt 5 gleich μ_5 für den Punkt 4.

Um nun einen Weg zur zeichnerischen Bestimmung der μ zu finden, setzen wir für einen Augenblick voraus, es seien für den Knotenpunkt 5 ausser den Werten $E\,\delta$ auch die μ' bekannt; dann lassen sich die μ mit Hülfe eines Kräfte- und eines Seilpolygons bestimmen.

Man reiht (Fig. 97) die Quotienten $J:s$ als lotrechte Kräfte in einem beliebigen Massstabe aneinander und verbindet die Grenzpunkte mit dem beliebig gewählten Pole O. Ferner trägt man in der Figur 98 die Kräfte derart auf, dass ihre gegenseitigen Abstände gleich den Werten $E\,\delta$ sind, verschiebt sodann diese Kräfte um die betreffenden Strecken μ' nach links und setzt sie durch

Fig. 97. Fig. 98.



ein Seilpolygon zusammen. **Dann sind die Entfernungen der verschobenen Kräfte von ihrer Mittelkraft gleich den doppelten μ.**

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht einzusehen. Stehen die verschobenen Kräfte um $2\,\mu$ von der Mittelkraft ab, so sind die Entfernungen der unverschobenen Kräfte von der Mittelkraft gleich $2\,\mu - \mu'$; da aber diese Kräfte um $E\,\delta$ von einander abstehen, so sind die drei ersten der obigen Gleichungen erfüllt. Mit der vierten Gleichung sodann steht die Construction deshalb im Einklang, weil die statischen Momente paralleler Kräfte (hier die Produkte $\frac{J}{s}\mu$), auf die Mittelkraft bezogen, zusammen stets gleich Null sind.

Nun sind freilich die μ' ebenso wenig wie die μ von vornherein bekannt; allein da eine Aenderung der μ' im Seilpolygon

nur mit dem halben Werte auf die μ übergeht, so erhält man rohe Annäherungswerte für die μ, wenn man die μ' zuerst gleich Null setzt, und kann hierauf unter Benutzung dieser angenäherten Werte und durch fortwährendes Corrigiren nach und nach zu den richtigen Werten gelangen,

Die Arbeit besteht somit darin, dass man für jeden Knotenpunkt ein Kräftepolygon mit den Werten $\frac{J}{s}$ zeichnet und in den Abständen $E\,\delta$ lotrechte Linien zieht. (Diese Teile der Zeichnung bleiben unverändert und werden am besten gleich mit Tusch ausgezogen). Hierauf zeichnet man, die μ' als nicht vorhanden betrachtend, die Seilpolygone, greift die hieraus sich ergebenden μ mit dem Zirkel ab und überträgt sie als μ' in die betreffenden andern Seilpolygone. Mit den so verschobenen Kräften wird jedes Seilpolygon zum zweiten Male gezeichnet und diese Arbeit so oft wiederholt, bis sich keine merklichen Aenderungen mehr zeigen.

Dass bei dem Auftragen sowohl der $E\,\delta$ als auch der μ' das Vorzeichen Berücksichtigung verlangt, versteht sich von selbst. Man halte zur Sicherheit die Regel fest, dass die Reihenfolge der Stäbe bei jedem Knotenpunkte nach der Uhrzeigerbewegung zu wählen ist, dass positive δ nach rechts, negative nach links hin weisen, dass ferner links von der Mittelkraft liegende μ als μ' auch nach links, rechts liegende nach rechts aufzutragen sind, und dass schliesslich die links liegenden μ als positiv, die rechts liegenden als negativ anzusehen sind.

Will man darauf Rücksicht nehmen, dass die Gleichungen für τ auf der Seite 181 nur annähernd richtig sind und dass (S. 182) die μ und μ' streng genommen mit Faktoren $\varkappa$ und $\varkappa'$ zu multipliciren wären, so trage man als Kräfte die Werte $\frac{J}{\varkappa\, s}$ auf und verschiebe dieselben um $\varkappa'\,\mu'$; dann findet man anstatt $2\,\mu$ die Werte $2\,\varkappa\,\mu$. Diese schärfere Berechnungsart führt, wie wir durch vergleichende Rechnungen erkannt haben, stellenweise zu ziemlich stark abweichenden Ergebnissen. Doch wollen wir sie ihrer Umständlichkeit wegen in der Folge nicht weiter berücksichtigen.

Stellen die Figuren 99 und 100 die Seilpolygone für die Knoten 4 und 5 dar, und bezeichnet man die Abstände der unverschobenen Kräfte von der jeweiligen Mittelkraft mit ν, so ist für die in beiden Seilpolygonen sich entsprechenden Kräfte $2\,\mu_4 = \mu_4' + \nu_4$ und $2\,\mu_5 = \mu_5' + \nu_5$, woraus sich, da $\mu_4 = \mu_5'$ und $\mu_5 = \mu_4'$ ist,

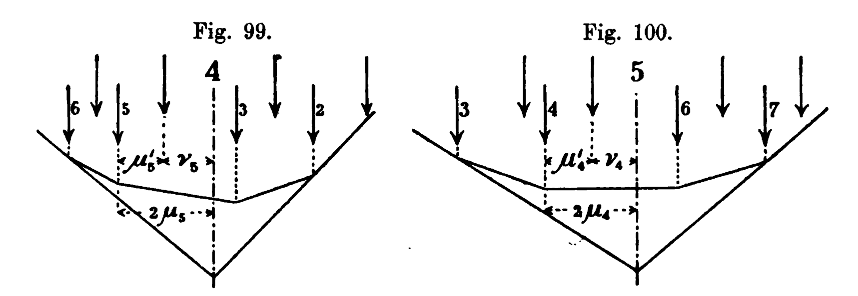
$$\mu_4' = \frac{\nu_4 + 2\,\nu_5}{3} \qquad \text{und}$$

$$\mu_5' = \frac{\nu_5 + 2\,\nu_4}{3}$$

ergibt. Wären die Mittelkräfte der Lage nach von vornherein bekannt, so liessen sich hiernach die μ sofort endgültig bestimmen. Diess ist nun zwar nicht der Fall; allein da sich die Mittelkräfte meistens nur wenig verschieben, so schliessen diese Gleichungen doch einen grossen Zeitgewinn in sich: Man verdoppelt mit dem Zirkel ν_5, fügt ν_4 hinzu, dividirt die Summe (graphisch) durch 3 und verschiebt die Kraft 4 um den Quotienten nach links.

Nach einiger Uebung erlangt man für diese Arbeit bald die nötige Sicherheit. —

Fig. 99. Fig. 100.



Sind die Werte μ bestimmt, so führt eine einfache Multiplication und Division sofort auf die Grösse der Nebenspannungen. Bezeichnet man letztere mit σ' und im Querschnitte des betreffenden Stabes die Entfernung der äussersten Kante von der Schwerpunktsaxe mit e, so ist bekanntlich

$$M = \frac{\sigma' \, J}{e}.$$

Nach früher (S. 184) ist aber $\mu = \frac{s \, M}{6 \, J}$; folglich ergibt sich die secundäre Spannung

$$\sigma' = \frac{6 \, e}{s} \, \mu.$$

Bei unsymmetrischen Querschnitten sind die e und damit auch die Spannungen auf beiden Seiten der Axe verschieden. — Bei symmetrischen Querschnitten verhält sich die secundäre Spannung zu μ, wie die dreifache Breite des Stabes zu seiner Länge.

Das Zeichen von σ' ist leicht festzustellen, wenn man bedenkt, dass positive μ im Sinne der Uhrzeiger um das Stabende drehen. —

Will man schliesslich noch wissen, um wie viel die Stabkräfte S infolge der starren Knotenpunkte aus den Stabaxen heraustreten, so braucht man

blos aus den μ die Momente M und hieraus die Hebelarme der Stabkräfte zu berechnen. Die hierzu dienende Formel lautet

$$c = \frac{M}{S} = \frac{6\,J\,\mu}{s\,S}.$$

46. Excentrische Befestigung der Stäbe und andere Einflüsse.

Sind einzelne Stäbe excentrisch befestigt, das heisst, gehen ihre Axen nicht durch die Knotenmittelpunkte, so entstehen nicht nur aus dieser Excentricität selbst neue Spannungen, sondern es ändern sich infolge dessen auch die secundären Spannungen.

Bezeichnet man die Grösse der Excentricität, das heisst die Entfernung der Stabaxe vom Knotenmittelpunkte mit c und gibt dabei dieser Grösse das positive oder das negative Zeichen, je nachdem das daraus entspringende Biegungsmoment das Stabende nach rechts oder nach links dreht, so findet man die aus der Excentricität entspringende Ablenkung der Stabaxe von der Geraden (vgl. S. 181)

$$\tau_c = \frac{s\,(2\,M - M')}{6\,J\,E} = \frac{s\,S\,(2\,c - c')}{6\,J\,E}.$$

Die Winkel zwischen den einzelnen Stäben ändern sich nun nicht nur infolge der Verlängerungen oder Verkürzungen der Stabaxen, sondern auch infolge der excentrischen Befestigung; und zwar wird je die vorhergehende Winkeländerung δ um τ_c vergrössert, die nachfolgende um ebenso viel verkleinert. Dem Winkel τ_c entspricht somit in den Figuren 98—100 eine Verrückung der betreffenden Kraft $\frac{J}{s}$ nach rechts.

Der Gang der Arbeit ändert sich daher nur wenig:

Man trägt die Kräfte $\frac{J}{s}$ wie früher in den Abständen $E\,\delta$ auf. Dann verschiebt man alle diejenigen Kräfte, welche excentrisch befestigten Stäben angehören, um die entsprechenden Werte $E\,\tau_c$ nach rechts, bei negativem τ_c nach links. Im Uebrigen bleibt sich der Gang der Zeichnung gleich.

Am Schluss hat man den direkten Einfluss der excentrischen Befestigung sowie die gefundenen Nebenspannungen σ' zu addiren.

Es zeigt sich, dass hierbei die zwei zu addirenden Grössen meistens ungleiches Vorzeichen haben, mit andern Worten, dass die schädliche Spannung, welche aus der excentrischen Befestigung der Stäbe entspringt, durch die starre Knotenverbindung wieder teilweise aufgehoben wird. —

Auf dem nämlichen Wege kann bestimmt werden, welchen Einfluss eine gebogene Form der Fachwerkstäbe ausübt. Man berechnet die Drehungen τ_c und τ'_c, welche die Stabenden erfahren, wenn die Kraft S auf den gebogenen Stab einwirkt, und führt hierauf diese Werte (mit E

multiplicirt) in gleicher Weise wie oben in die Zeichnung ein. Am Schlusse sind die Nebenspannungen, welche aus der gebogenen Form entstehen, mit denjenigen, welche die Zeichnung liefert, zu vereinigen. —

Auch der Einfluss des eigenen Gewichtes der Fachwerkstäbe kann auf diese Weise ermittelt werden. Man betrachtet jeden Stab zuerst unabhängig von den andern, bestimmt die Spannungen, die das eigene Gewicht hervorruft, sowie die Winkel, um welche die beiden Stabenden infolge dessen sich drehen; dann führt man diese Drehungswinkel, mit E multiplicirt, genau so wie bei excentrischer Befestigung in die Zeichnung ein, sucht die μ auf und fügt die hieraus entspringenden Spannungen zu den vorhin genannten hinzu. —

Endlich lässt sich auch der Einfluss, welchen eine unrichtige Länge einzelner Stäbe oder eine Erwärmung der einzelnen Fachwerkstäbe infolge der starren Knotenpunkte ausübt, nach dem obigen Verfahren leicht ermitteln. Man hat einfach anzunehmen, die zu grosse Länge, beziehungsweise die von der Erwärmung bewirkte Verlängerung sei durch eine innere Spannung entstanden; man hat daher, wenn Δs die überschüssige Länge bezeichnet, $\sigma = \frac{\Delta s \, E}{s}$ oder, bei Temperatureinflüssen, $\sigma = E \alpha t$ zu setzen, worin α den Ausdehnungscoefficienten des Materials und t die Anzahl Grade der Temperaturzunahme bedeutet. Hiernach lassen sich die $E \delta$ berechnen und wie früher die μ construiren.

47. Gelenkförmige Knotenpunkte.

Ist ein Stab an einem seiner Endpunkte derart befestigt, dass er sich daselbst ohne Reibung drehen kann, so geht die Kraft, welche den Stab beansprucht, an dieser Stelle genau durch den Drehpunkt; das Moment M und die Grösse μ fallen für diese Stelle weg. In der oben beschriebenen zeichnerischen Bestimmung der secundären Spannungen muss daher die entsprechende Kraft $(J : s)$ genau mit der Mittelkraft zusammenfallen; die Winkeländerungen, welche durch die Drehung dieses Stabes entstehen, fallen hierbei ausser Betracht.

Der Weg, auf welchem dieser Umstand berücksichtigt wird, ist damit vorgezeichnet: Man verfährt wie gewöhnlich, verlegt aber im Seilpolygon des betreffenden Knotens die dem Stabe entsprechende Kraft jeweilen in die Mittelkraft. Die Kraft verschiebt sich hierbei, wie die Mittelkraft, bald nach rechts, bald nach links; ihre endgültige Verschiebung gibt zugleich an, um wieviel sich der Stab am Gelenke gedreht hat.

Ist der Stab an seinem anderen Endpunkte vernietet, so stellt sich dort wie früher ein Biegungsmoment ein. Der Stab erfährt somit trotz des Gelenkes Nebenspannungen; doch nehmen diese nach dem drehbaren Ende fortwährend ab. Sind jedoch beide Enden drehbar, so bleibt der Stab von Nebenspannungen frei.

Treffen an einem Knotenpunkte mehrere Stäbe zusammen, die sich

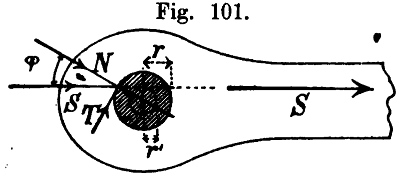
reibungslos drehen können, so sind sie alle auf obige Weise zu behandeln. Sind sämtliche Stäbe drehbar, so fallen im Seilpolygon alle Kräfte zusammen; dieses braucht daher nicht gezeichnet zu werden.

Vollkommen reibungslose Drehung kommt zwar in der Wirklichkeit nicht vor; doch sind immerhin Fälle denkbar, wo die Reibung, welche sich der Drehung entgegenstellt, verschwindend klein ist und vernachlässigt werden kann.

Wichtiger ist der Fall, wo bei der Drehung des Stabes um das Gelenk Reibungswiderstände auftreten.

Soll ein solcher Stab um den Gelenkbolzen eine Drehung ausführen, so muss die Stabkraft notwendig aus ihrer axialen Lage heraustreten, und zwar so weit, dass die an der Gelenkfläche entstehende Reibung überwunden wird.

Fig. 101.



Denkt man sich die Stabkraft S in dem Punkte, wo sie die Gelenkfläche trifft, in zwei Seitenkräfte, normal und tangential zu dieser Fläche zerlegt, so muss die Tangentialkraft gleich dem Reibungswiderstande sein. Da letzterer gleich der Normalkraft mal dem Reibungscoefficienten ist, so folgt, wenn φ den Reibungswinkel bedeutet, $T = N \,.\, tang\ \varphi = S \,.\, sin\ \varphi$. Zeichnet man (Fig. 101) einen zum Gelenkkreise concentrischen Kreis, welcher die Stabkraft berührt, und bezeichnet den Halbmesser des Gelenkbolzens mit r, so ist der Halbmesser des zweiten Kreises

$$r' = r \,.\, sin\ \varphi.$$

Dieser zweite, in der Figur punktirte Kreis ist somit von der Grösse und Richtung der Stabkraft unabhängig und lässt sich zeichnen, sobald man den Reibungswinkel kennt.

So lange die Kraft diesen Kreis schneidet, findet keine Bewegung statt; damit eine Drehung eintrete, muss die Kraft den Kreis berühren. (Vgl. hierüber die Schrift des Professors *G. Herrmann:* Zur graphischen Statik der Maschinengetriebe.)

Handelt es sich nun um die Bestimmung der Nebenspannungen in einem Fachwerke, dessen Stäbe sämtlich oder zum Teil durch Gelenke verbunden sind, so hat man im Allgemeinen den früheren Weg einzuschlagen, jedoch dafür zu sorgen, dass die Stabkraft nicht mehr als um r' aus der centrischen Lage heraustrete. Nach früher (S. 188) verschiebt sich die Kraft um die Strecke

$$c = \frac{6\ J\ \mu}{s\ S};$$

diese Strecke muss $\overline{\overline{<}}\ r\ sin\ \varphi$ sein. In der Regel dürfte hiernach der folgende Weg einzuschlagen sein:

Man berechne zum voraus die Grenzwerte

$$\mu = \frac{S\ s\ r\ sin\ \varphi}{6\ J}$$

und trage sie über jedem Seilpolygone als horizontale Strecken auf. Hierauf

zeichne man die Seilpolygone wie früher, sorge aber dafür, dass sich die einzelnen Kräfte $(J : s)$ nicht mehr als um ihre Grenzwerte von der Mittelkraft entfernen; mit andern Worten man versetze alle Kräfte, die in grössere Entfernung von der Mittelkraft zu liegen kommen, als der Grenzwert erlaubt, auf diese erlaubte Grenze zurück. Im Uebrigen bleibt Alles beim Alten.

Die Strecken, um welche die Kräfte am Schlusse der Arbeit versetzt erscheinen, geben das Mass der Drehung an, welche das betreffende Stabende ausführt; bleibt eine Kraft von dieser Massregel unberührt, so ist dies ein Zeichen, dass der Stab sich trotz des Gelenkes nicht dreht.

Aus den Werten μ, die sich bei dieser Arbeit ergeben, lassen sich die Nebenspannungen wie früher berechnen. Für diejenigen Stabenden, die sich drehen, bekommt man jedoch die Grösse der Nebenspannung einfacher nach der Formel:

$$\sigma' = \frac{e\,M}{J} = \frac{e\,S\,r\,\sin\varphi}{J}.$$

Es ist dies der Grenzwert, über welchen die Spannung bei gelenkförmiger Verbindung nicht hinausgehen kann. —

Die Durchrechnung eines bestimmten Fachwerkes mit gelenkförmigen Knotenverbindungen ist hiernach eine zwar umständliche, aber durchaus nicht schwierige Arbeit. Die grössere Schwierigkeit liegt in der richtigen Wahl des Reibungswinkels φ. Den für Bewegung von Eisen auf Eisen geltenden Wert darf man nicht ohne Bedenken einführen. Denn einerseits kann der Reibungswiderstand infolge von Rost erheblich höher steigen; auch das feste Anziehen der Bolzenmuttern kann die Beweglichkeit schwächen. Andrerseits ist es wahrscheinlich, dass infolge der Erschütterungen, welche die über die Brücke gehenden Verkehrslasten bewirken, kleine ruckweise Drehungen eintreten, Bewegungen, welche bei ruhender Last nicht eintreten würden; es wäre dies gleichbedeutend mit einer vorübergehenden Verringerung des Reibungswinkels.

Ueber diese zur Zeit noch ziemlich ungelösten Fragen können offenbar nur Versuche Aufschluss geben. (Vgl. Prof. Dr. *Fränkels* Abhandlung über die am eisernen Viadukt bei Weida angestellten Messungen im Civilingenieur 1887.)

48. Bestimmung der secundären Spannungen für einen Parallelträger.

Wir haben mit Hülfe des in der Nummer 45 beschriebenen Verfahrens die Nebenspannungen in einem speziellen Fachwerke bestimmt und teilen hier, ohne auf die Einzelheiten der Arbeit näher einzutreten, die Ergebnisse derselben mit.

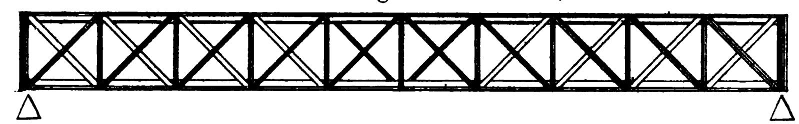
Als Beispiel wählten wir eine Brücke der Gotthardbahn (Inschialpbachbrücke zwischen Amsteg und Wassen). Die Figur 102 stellt eine Ansicht des

Trägers dar. Die Spannweite beträgt 40 *m*, die Höhe 4 *m*. Als Belastung setzten wir (Eigengewicht inbegriffen) 4 *t* auf den laufenden Meter einer Tragwand an.

Die beiden Gurtungen bestehen aus je einem Stehblech, zwei Winkeleisen und 1 bis 3 Kopfplatten; die obere hat überdies zwei Saumwinkel erhalten. Die Pfosten und die Druckstreben sind aus je vier Winkeleisen, die Zugstreben aus je zwei Flacheisen zusammengesetzt. Die vier Diagonalen der beiden Mittelfelder bestehen jedoch aus je zwei Winkeleisen mit eingelegtem Streifen. (Die Querschnittsflächen der einzelnen Stäbe sind bereits auf der Seite 168 angegeben.)

Die Streben sind an ihren Kreuzungspunkten vernietet; wir mussten diese Punkte deshalb ebenfalls als Knotenpunkte behandeln.

Fig. 102.



Zuerst wurden auf Grund der gegebenen Belastung die Stabkräfte bestimmt und zwar, da das Fachwerk statisch unbestimmt ist, nach dem im vorigen Kapitel (Nr. 37) beschriebenen Verfahren. Diese Kräfte, geteilt durch die Querschnittsflächen, ergaben die primären oder Hauptspannungen. Aus diesen wurden sodann nach Anleitung der Textfigur 92 (S. 177) die Werte $E\delta$ berechnet.

Als Probe für die Richtigkeit dieser Zahlen kann gelten, dass die Summe derselben in jedem Dreiecke sowohl als um jeden Kreuzungspunkt herum gleich null sein muss. Nebenbei lässt sich aus diesen Zahlen auch die Durchbiegungskurve des Fachwerkes berechnen. (Vgl. Nr. 27 und 39.)

Hiernach folgte die Berechnung der Trägheitsmomente J und der Brüche $J : s$. Da es nicht auf die absolute Grösse, sondern nur auf das gegenseitige Verhältnis dieser Quotienten ankommt, so kann man der Bequemlichkeit wegen die J in dm^4 und die s in Metern ausdrücken. Auch der Massstab, in welchem man die $J : s$ aufträgt, ist für jeden Knotenpunkt beliebig. Bei der Berechnung der J wurden die Nietlöcher nicht in Abzug gebracht. (Vgl. den Schluss von Nr. 32.)

Nach Erledigung dieser vorbereitenden Arbeiten wurden für die 17 Knotenpunkte der linken Fachwerkshälfte (der Symmetrie wegen kann die rechte Hälfte wegbleiben) nach dem in der Nummer 45 beschriebenen Verfahren die Kräftepolygone der $J : s$ und die Seilpolygone gezeichnet. Erstere bleiben unverändert; letztere müssen den stets wechselnden Lagen der Kräfte folgend mehrmals gezeichnet werden. Nach viermaliger Wiederholung der Arbeit ergaben sich keine nennenswerten Widersprüche mehr.

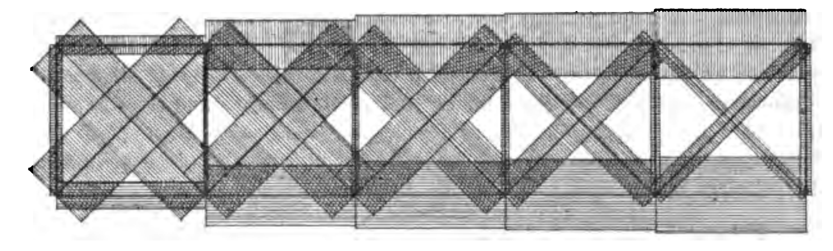
Den Seilpolygonen wurden hierauf die Werte μ entnommen und aus diesen schliesslich nach der Formel auf der Seite 187 die secundären Spannungen berechnet.

Um letztere gut überblicken und mit den primären Spannungen ver-

Primäre Spannungen.

Fig. 103.

Auflager Mitte



Secundäre Spannungen.

Fig. 104.

(Kreuzungspunkte vernietet.)

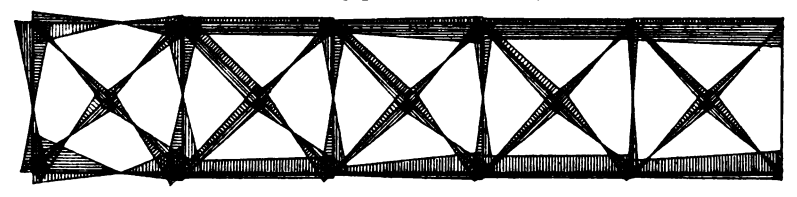


Fig. 105.

(Kreuzungspunkte unvernietet.)

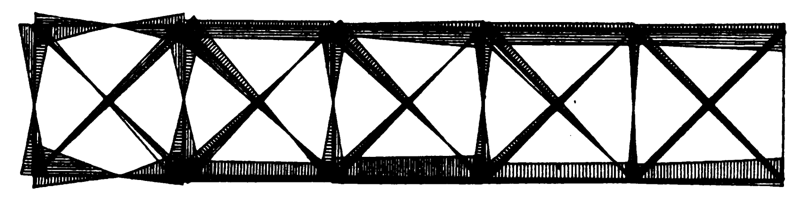
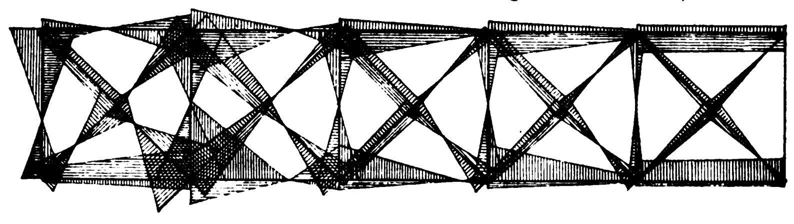


Fig. 106.

(Mit Rücksicht auf die excentrische Lage der Stabaxen.)



gleichen zu können, haben wir beide durch die Figuren 103 und 104 dargestellt.

Die Breite der Streifen entspricht der Grösse der Spannung und zwar stellt jeder Millimeter 60 Kilogramme auf den Quadratcentimeter dar. Zugspannungen sind durch längs den Stabaxen, Druckspannungen durch quer laufende Striche dargestellt. In der Figur 103 ist jeweilen die ganze Breite des Streifens massgebend; in der folgenden hat man, da es sich um Biegungsspannungen handelt, zwischen linker und rechter Kante zu unterscheiden. Die eine hat stets Zug-, die andere Druckspannungen auszuhalten. Auf die Schwächung durch Nietlöcher ist keine Rücksicht genommen, sonst würden die primären Spannungen noch um 10—15 % grösser sein.

Man sieht, dass die Nebenspannungen namentlich in der Nähe der Auflager bedeutend werden, doch ohne mit den Hauptspannungen zusammen das zulässige Mass zu überschreiten. —

Um zu prüfen, welchen Einfluss die Vernietung der Kreuzungspunkte der Streben ausübt, ist die ganze Arbeit für unvernietete Kreuzungen wiederholt worden. Die Figur 105 stellt die Ergebnisse dar. Ein Vergleich mit der Figur 104 lässt erkennen, dass die Vernietung von untergeordnetem Einflusse ist. Man kann daraus den Schluss ziehen, dass wenigstens für schmale Streben diese Vernietung unschädlich, mit Rücksicht auf die gegen Knicken geschützteren Druckstäbe sogar vorteilhaft ist. In wie weit dies bei kürzeren und breiteren Streben zutrifft, müssen anderweitige Studien zeigen. —

Die Stäbe der auf ihre Nebenspannungen untersuchten Brücke sind an den Knotenpunkten ziemlich stark excentrisch mit einander verbunden. Die Axen der schiefen Streben schneiden sich nämlich nicht auf der Schwerlinie der Gurtungen, sondern durchgehends um 70 *mm* ausserhalb der Kante des Stehbleches. (Vgl. Fig. 107). Ausserdem sind die Endpfosten um ein gutes Stück nach aussen versetzt.

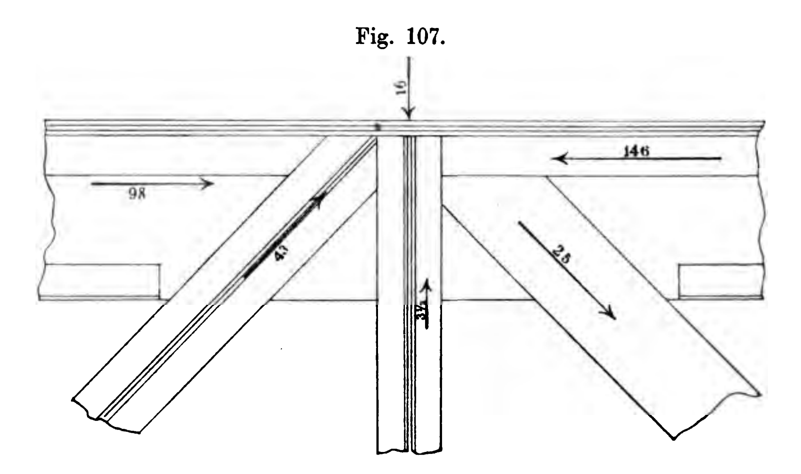
Wir haben auch diesen Fall durchgearbeitet und sind dabei auf Ergebnisse gelangt, wie sie die Figur 106 zeigt. Die Nebenspannungen steigen hier stellenweise sehr hoch an, doch bei weitem nicht so hoch, wie wenn die Stabkräfte sich genau im mathematischen Knotenpunkte schneiden müssten, wie dies bei reibungslosen Gelenkverbindungen der Fall wäre. Die Excentricität für sich allein ergibt beispielsweise für die Zugdiagonale des ersten Faches eine Nebenspannung von 550 *kg* pro cm^2, für die Druckdiagonale sogar 1540 *kg*; in Wirklichkeit beträgt die Zusatzspannung nur 50—350, beziehungsweise 40—160 *kg*. Infolge der starren Knotenpunktsverbindungen ändert sich nämlich die Lage der Stabkräfte fast durchgehends in günstigem Sinne; die Kräfte rücken gewissermassen den excentrisch befestigten Stäben nach, ohne dass dabei das Gleichgewicht gestört wird; oder mit andern Worten, die Kräfte passen sich den Stäben an, und zwar in einer Weise, wie es absichtlich kaum günstiger bewerkstelligt werden könnte.

Es geht dies aus der Figur 107 noch klarer hervor, in welcher wir den dritten oberen Knotenpunkt mit der Lage der fünf Stabkräfte dargestellt haben.

Freilich zeigt diese Figur zugleich, dass dieses Anpassungsvermögen durch die verticalen Pfosten wesentlich unterstützt wird; wenn diese fehlten, ergäben sich ohne Zweifel höhere Zusatzspannungen.

Es ist wohl zum grössten Teil dem Zufall zuzuschreiben, dass in unserem Beispiele trotz der starken Excentricität die grössten Nebenspannungen meistens an Stellen treffen, wo die primäre Spannung niedrig steht. Immerhin steigt die Summe beider Spannungen an einigen Stellen über das zulässige Mass hinaus, so namentlich bei der ersten Zugstrebe, an deren unterem Ende

Fig. 107.



sich zu den 551 *kg* primärer Inanspruchnahme noch 350 *kg* secundärer gesellen. —

Da die Nebenspannungen durch excentrische Lage der Stabkräfte entstehen, so liegt die Frage nahe, ob sich diese Spannungen nicht vielleicht durch absichtliche excentrische Befestigung der Stäbe abschwächen liessen. Wir haben einen Versuch dieser Art durchgeführt, dabei jedoch nur geringen Gewinn erzielt. Immerhin ist die Frage wert, weiter verfolgt zu werden.

49. Abgekürztes Verfahren.

Vergleicht man die Werte $J:s$ der verschiedenen Stäbe eines Fachwerkes miteinander, so wird man meistens finden, dass die den Streben entsprechenden Werte gegenüber denjenigen der Gurtungen klein sind. Bei Fachwerken mit gekrümmter Gurtung ist dies im Allgemeinen in noch höherem Grade der Fall als bei Parallelträgern, weil bei ersteren die Streben weniger beansprucht werden, demgemäss auch im Allgemeinen geringere Trägheitsmomente besitzen als bei letzteren.

Der Gedanke liegt nun nahe, die Bestimmung der secundären Spannungen unter der Annahme durchzuführen, dass die Trägheitsmomente der Füllungsglieder verschwindend klein seien. Offenbar sind dann die Momente M für je zwei zusammen stossende Gurtungsstäbe gleich gross.

Es böte keine Schwierigkeit, hierauf fussend das vorstehend beschriebene Verfahren abzuändern. Rascher jedoch gelangt man jetzt zu den gesuchten Spannungen, wenn man die beiden Gurtungen samt den beiden Endpfosten als einen continuirlichen Balken von geschlossener, ringförmiger Gestalt ansieht.

Von dieser Anschauung ausgehend und die von Prof. *Mohr* begründete Behandlung continuirlicher Balken anwendend, hat Prof. *Th. Landsberg* in der Zeitschrift des Hannover'schen Archit. und Ingen.-Vereins (1885 und 1886) ein graphisches Verfahren zur Ermittelung der secundären Spannungen aufgestellt, das sich in manchen Fällen als zweckmässig erweist. Wir geben dieses Verfahren nachstehend in etwas abgeänderter Form wieder.

In der Nummer 44 (S. 178) ist gezeigt worden, wie die elastische Linie eines geraden Balkens gezeichnet wird, wenn die Biegungsmomente bekannt sind, denen er unterworfen ist. Man betrachtet zu diesem Zwecke die Momentenfläche des Balkens als Belastungsfläche und zeichnet, das Produkt EJ als Polabstand benützend, ein Seilpolygon. Oder, was auf dasselbe hinausführt: Man betrachtet die durch J dividirte Momentenfläche als Belastungsfläche und verwendet E als Polweite.

Im Allgemeinen zerlegt man dabei die Momentenfläche in senkrechte Streifen; doch ist auch jede andere Teilung zulässig, sobald man nur die Endtangenten der elastischen Linie zu kennen wünscht. So lässst sich (Fig. 108) die trapezförmige Momentenfläche eines Stabes, der an beiden Enden von den Momenten M_1 und M_2 beansprucht wird, auch in zwei Dreiecke zerlegen. Das Seilpolygon verbindet dann zwei Kräfte von der Grösse $\frac{M_1 s_1}{2\,J_1}$ und $\frac{M_2 s_1}{2\,J_1}$. Die erste und letzte Seite dieses Polygons geben nichtsdestoweniger die Richtung an, welche die elastische Linie an beiden Endpunkten besitzt.

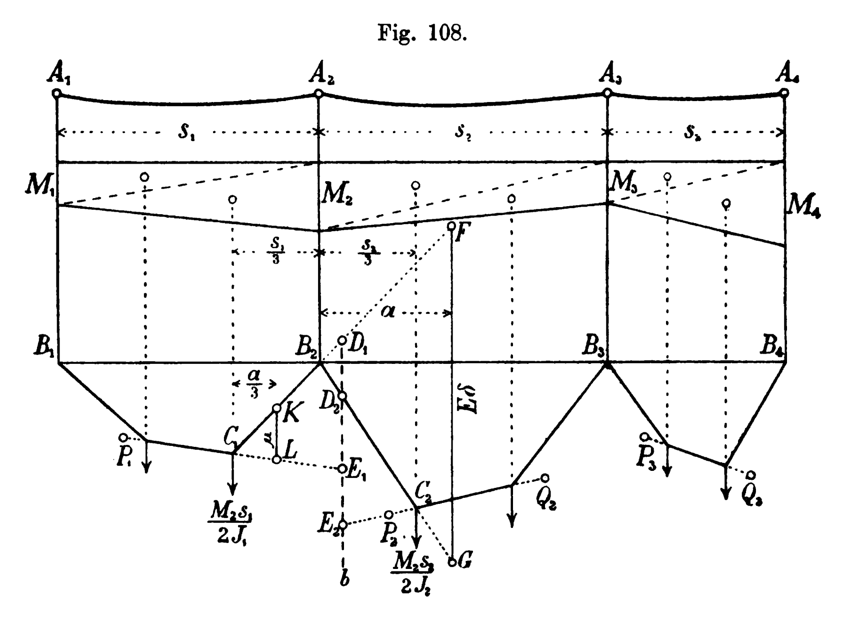
Freilich muss dieses Seilpolygon, um deutlich zu werden, in

lotrechter Richtung stark verzerrt werden; doch erleiden unsere nachfolgenden Betrachtungen hierdurch keine Störung, wenn nur dafür gesorgt wird, dass das Verzerrungsverhältnis überall das nämliche bleibt.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Momente M für eine Reihe zusammenhängender wagrechter Stäbe derart zu bestimmen, dass deren elastische Linien unter gegebenen Winkeln zusammen stossen.

Man denke sich nämlich den von den beiden Gurtungen gebildeten Ring an einer beliebigen Stelle durchgeschnitten und zu

Fig. 108.



einem einzigen langen Stabe auseinander gestreckt; ferner knicke man diesen Stab an jedem Knoten um den kleinen Winkel δ ein, um welchen sich der von den Stäben eingeschlossene Winkel infolge der elastischen Stabverlängerungen ändern will. Dann erhält man offenbar eine Reihe von leicht gebogenen Stäben, deren Sehnen eine gerade Linie bilden, während die Richtung der Tangente sich an jedem Knotenpunkte um δ ändert.

Es seien nun (Fig. 108) $A_1\, A_2$, $A_2\, A_3$ .... eine Anzahl aufeinander folgender Gurtstäbe und $M_1\, M_2\, M_3$ .... die an ihren Enden angreifenden Momente.

Wir nehmen dabei — abweichend von früher — an, die Stäbe seien alle einfach gekrümmt, das heisst die Momente, welche an den beiden Endpunkten eines Stabes angreifen, hätten stets entgegengesetzte Zeichen. Es sei also für den ersten Stab M_1 positiv, M_2 negativ, für den zweiten M_2 positiv, M_3 negativ u. s. w. Die Momentenflächen der einzelnen Stäbe sind dann nicht-überschlagene Trapeze.

Teilt man jetzt die Momentenflächen in je zwei Dreiecke und lässt in deren Schwerpunkten die Werte $\frac{M\,s}{2\,J}$ als Kräfte wirken, so entsteht das Seilpolygon $B_1\ B_2\ B_3 \ldots$, welches nach früher an jedem Knotenpunkte die Richtung der gebogenen Stabaxe angibt, vorausgesetzt, dass bei der Zeichnung dieses Seilpolygons der Elasticitätscoefficient E als Polweite verwendet wird. Nun wählen wir aber aus Zweckmässigkeitsgründen nicht E, sondern eine beliebige (für die ganze Zeichnung gleichbleibende) Länge a als Polabstand. Die Folge davon ist, dass die Figur im Verhältnis $a : E$ verzerrt wird. Wie oben erklärt worden ist, schliessen jetzt je zwei an einem Knoten zusammentreffende Seiten den Winkel δ miteinander ein. Zieht man daher im Abstande a von B_2 eine Verticale, so schneiden auf ihr die Linien $C_1\ B_2$ und $B_2\ C_2$ eine Strecke $F\,G$ ab, welche in Wirklichkeit gleich $a\,\delta$, unter Berücksichtigung des Verzerrungsverhältnisses jedoch gleich $E\,\delta$ ist.

Teilt man ferner die wagrechte Entfernung der Punkte C_1 und C_2 in zwei Teile, die sich zueinander verhalten wie $\frac{J_1}{s_1} : \frac{J_2}{s_2}$ und zieht durch den Teilpunkt eine Verticale b, so schneiden die benachbarten Seilpolygonseiten auf dieser gleich grosse Strecken $D_1\ E_1$ und $D_2\ E_2$ ab, wie man sofort erkennt, wenn man diese Strecken als die statischen Momente der Kräfte $\frac{M_2\,s_1}{2\,J_1}$ und $\frac{M_2\,s_2}{2\,J_2}$ auffasst.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, auf Grund der bekannten Werte J, s und δ die Momente M derart zu bestimmen, dass den soeben abgeleiteten Bedingungen Genüge geleistet wird.

Wir wollen für einige Zeit annehmen, es sei uns von der zweiten Seilpolygonseite ein Punkt P_1 bekannt; dann lässt sich an der Hand dieser Bedingungen ein Punkt P_2 bestimmen, der auf der fünften Seite des Seilpolygons liegt.

Betrachtet man nämlich den Punkt P_1 als gegeben und zieht durch ihn zunächst in beliebiger Richtung die Seite $P_1\ C_1\ E_1$, so

ist damit auch die Linie $C_1\ B_2\ F$ bestimmt. Aus F findet man G und hierdurch die Linie $B_2\ G$. Ueberträgt man dann den Abschnitt $D_1\ E_1$ nach $D_2\ E_2$, so erhält man in $E_2\ C_2$ die Lage der fünften Seilpolygonseite.

Aendert man jetzt die Richtung der Linie $P_1\ C_1$, so ändern sich auch die übrigen Linien. Dabei beschreiben aber alle vorkommenden Punkte auf ihren Verticalen ähnliche Reihen; dreht sich daher die Linie $C_1\ E_1$ um den festen Punkt P_1, so dreht sich auch die Linie $C_2\ E_2$ um einen festen Punkt P_2.

Um P_2 aus P_1 zu bestimmen, braucht man nur die Linie $P_1\ C_1$ in zwei verschiedenen Richtungen zu ziehen und obige Construction zu wiederholen; dabei ist es von Vorteil, als zweite Richtung die Linie $P_1\ B_2$ zu wählen, weil dann die Strecken $D_1\ E_1$ und $D_2\ E_2$ verschwinden.

Man zieht also (Fig. 109) erst $P_1\ C_1\ E_1$ beliebig, dann $C_1\ B_2\ F$ und macht $F\,G$ gleich dem gegebenen Werte $E\,\delta$; hierauf zieht man $B_2\ G$, macht $D_2\ E_2$ gleich $D_1\ E_1$ und zieht $E_2\ C_2$. Nun zieht man weiter $P_1\ B_2\ F'$, macht $F'\ G'$ gleich $F\ G$ und verbindet G' mit B_2, so ist P_2 bestimmt.

Fig. 109.

Aendert man die Strecke $F\ G = F'\ G'$, während der Punkt P_1 seine Lage beibehält, so gleitet der Punkt P_2 auf einer Verticalen. Denn in der Figur 109 verschieben sich hierbei die Punkte G, G', D_2, E_2 und C_2 sämtlich um Strecken, die ihren Entfernungen von der Verticalen $B_2\ B$ proportional sind. Der Punkt P_2 als Schnitt der Büschel $B_2\ G'$ und $B\ C_2$ muss daher eine verticale Linie beschreiben.

Dieser Umstand ermöglicht es, die Zeichnung noch wesentlich zu vereinfachen: Denkt man sich nämlich zuerst, die Strecke $F\,G$ sei gleich Null, so fällt $B_2\ G$ mit $B_2\ F$ und $B_2\ G'$ mit $B_2\ F'$ zusammen; infolge dessen gelangt C_2 nach C, D_2 nach D_1, E_2 nach E_1 und der Punkt P_2 nach P. Den Punkt P findet man aber, wie man sieht, rasch vermittelst

der vier Geraden $P_1\ E_1$, $C_1\ C$, $E_1\ C$ und $P_1\ B_2\ P$. Hierdurch ist die Verticale bestimmt, auf welcher der Punkt P_2 liegt; um diesen selbst zu finden, hat man jetzt nur noch $P_1\ B_2$ bis F' zu verlängern, $F'\ G'$ gleich $E\delta$ zu machen und G' mit B_2 zu verbinden.

In gleicher Weise, wie man aus $P_1\ P_2$ findet, lässt sich sodann (Fig. 108) aus P_2 ein Punkt P_3 finden, welcher der achten Seilpolygonseite angehört; ebenso gelangt man von P_3 auf P_4, von P_4 auf P_5 u. s. f.

Um die Zeichnung recht übersichtlich zu machen, ist es geraten, die Verticalen, auf welchen alle diese Punkte liegen, von vornherein zu bestimmen. Man verlegt zu diesem Zwecke P_1 in die Horizontale durch $B_1\ B_2$ und findet mit Hülfe der vier oben genannten Linien denjenigen Punkt in welchem die Verticale durch P_2 die Horizontale schneidet, von hier aus in gleicher Weise den Schnittpunkt der Verticalen P_3 und so weiter alle folgenden. Man gelangt auf diese Weise zu einer Reihe von senkrechten Linien, welche nur von den Grössen s und J abhängig sind. Wir nennen sie in der Folge die Festlinien.

Sind die Festlinien bestimmt, so findet man, wie schon bemerkt, aus einem Punkte P den folgenden dadurch, dass man ihn mit dem Punkte B verbindet, im Abstande a die Strecke $E\ \delta$ aufträgt und deren Endpunkt mit B verbindet. —

Handelt es sich nun darum, die Momente M für einen geschlossenen Ring von Gurtungsstäben zu ermitteln, so ist freilich keiner der Punkte P von vorn herein bekannt. Verschiebt man P_1, so verschieben sich auch alle folgenden Punkte. Die Verschiebungen nehmen jedoch von Punkt zu Punkt sehr rasch ab, so dass der anfängliche Fehler bald verschwindet. Der Gang der Arbeit gestaltet sich daher folgendermassen:

Man bestimmt zunächst unabhängig von den Werten $E\,\delta$ sämtliche Festlinien, indem man die erste beliebig (aber immerhin möglichst richtig) annimmt und nun Schritt für Schritt alle folgenden bestimmt. Kommt man nach Umfahrung des ganzen Ringes an den Anfangspunkt zurück, so fährt man einfach weiter, bis die Fehler verschwinden, das heisst bis die neuen Linien sich mit den alten decken. Das Nämliche geschieht sodann mit den Punkten P. Man wählt P_1 auf der ersten Festlinie beliebig, bestimmt daraus alle folgenden Punkte und setzt diese Arbeit nach Umfahrung des

Ringes einfach fort, bis die neuen Punkte mit dem alten zusammenfallen.

Diese ganze Arbeit wird nun zweimal durchgeführt, einmal in der Richtung von links nach rechts und dann in der Richtung von rechts nach links. Beim zweiten Male findet man eine Reihe von Punkten Q, die wie die Punkte P auf den mittleren Seilpolygonseiten liegen. (Vgl. Fig. 108.) Verbindet man jetzt je zwei zusammengehörende Punkte P und Q, so erhält man für jeden Stab die mittlere Seite des Seilpolygons; damit ist zugleich der ganze Seilzug selbst bestimmt.

Um schliesslich die gesuchten Momente, beispielsweise M_2 zu erhalten, ziehe man (Fig. 108) im Abstand $^1/_3\, a$ von C_1 eine Verticale und betrachte die Strecke $K\,L$ als das statische Moment der in C_1 angreifenden Kraft. Da a die Poldistanz des dem Seilpolygon entsprechenden Kräftepolygons darstellt (s. S. 198), so ist dann

$$\frac{M_2\, s_1}{2\, J_1} \,.\, {}^1/_3 a = K\,L\,.\,a\,.$$

oder

$$M_2 = \frac{6\, J_1}{s_1}\,.\,K\,L.$$

Hieraus ergibt sich wie früher die secundäre Spannung am rechten Endpunkte des ersten Stabes

$$\sigma = \frac{e\, M_2}{J_1} = \frac{6\, e}{s_1}\,.\,K\,L.$$

Die Strecken $K\,L$ sind, wie man leicht erkennt, nichts Anderes als die Werte μ der Nummer 45. Nur hat man diejenigen auf der rechten Seite des Stabes jeweilen mit umgekehrtem Zeichen zu nehmen, wenn in dieser Hinsicht vollständige Uebereinstimmung mit früher entstehen soll.

Sind sämtliche Stäbe gleich lang, so macht man am besten a gleich der Stablänge und hat dann die μ einfach auf den Senkrechten durch die Knotenpunkte abzugreifen. —

Wenn nun auch bei diesen Betrachtungen die Trägheitsmomente der Streben als verschwindend klein angesehen worden sind, so ist damit nicht gesagt, dass man für die Streben keine secundären Spannungen erhält. Denn kennt man (Fig. 110) die Werte μ für die Gurtungen und zugleich die Richtungsänderungen δ_1 und δ_3, welche beispielsweise der Stab $A\,B$ gegenüber A 1 und B 3 erfährt,

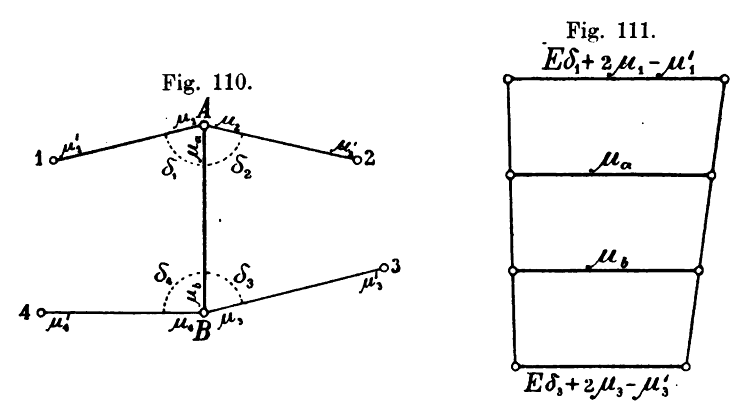
so lassen sich nach den in der Nummer 45 (S. 184) abgeleiteten Beziehungen die Gleichungen

$$E\,\delta_1 = (2\,\mu_a - \mu_b) - (2\,\mu_1 - \mu_1')$$
$$E\,\delta_3 = (2\,\mu_b - \mu_a) - (2\,\mu_3 - \mu_3')$$

aufschreiben, woraus sich die beiden μ für die Strebe $A\,B$ leicht berechnen lassen.

Hat man die Winkeländerungen δ nach der Figur 90 (S. 176) zeichnerisch bestimmt, so findet man die μ für die Streben am besten auf folgendem Wege:

Man zieht (Fig. 111) in gleich grossen Abständen vier parallele



Linien, trägt auf den beiden äussern die Strecken $E\,\delta_1 + 2\,\mu_1 - \mu_1'$ und $E\,\delta_3 + 2\,\mu_3 - \mu_3'$ auf und verbindet deren Enden, so werden auf den beiden inneren Linien die gesuchten Strecken μ_a und μ_b abgeschnitten. Man beweist die Richtigkeit dieser Construction leicht an der Hand obiger Gleichungen.

Wird es bequemer, statt δ_1 und δ_3 die Winkel δ_2 und δ_4 anzugeben, so hat man die beiden wagrechten Strecken gleich $- E\,\delta_2 + 2\,\mu_2 - \mu_2'$ und $- E\,\delta_4 + 2\,\mu_4 - \mu_4'$ zu machen.

50. Secundäre Spannungen in einem Schwedler'schen Fachwerke.

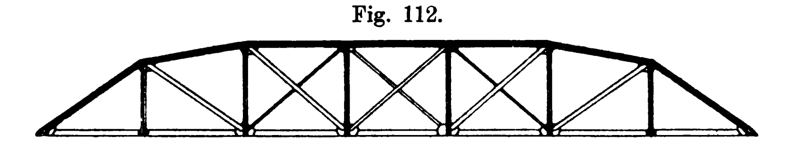
(Tafel 5).

Auf der Tafel 5 haben wir zur Erläuterung des Vorangegangenen die Nebenspannungen bestimmt, welche in einem kleinen *Schwedler'*schen Fachwerke bei vollständiger Belastung eintreten.

Die Textfigur 112 gibt ein Bild dieses Fachwerkes. Seine Spannweite beträgt 28,35 *m*, seine Höhe in der Mitte 3,50 *m*. Die 7 Fächer sind alle 4,05 *m* lang. Die Gurtungen sind kastenförmig gebildet; die Pfosten besitzen Blechbalkenquerschnitt, die Streben sind durchgehends bandförmig*).

Als Belastung wurden auf den laufenden Meter der einzelnen Tragwand 0,75 *t* für das eigene Gewicht und 2,4 *t* für die Verkehrslast (Eisenbahnzug) angenommen. Ueberträgt man von ersterem

Fig. 112.



ein Drittel auf die oberen Knoten, so entfällt auf diese eine Last von je 1,01 *t* und auf die unteren eine Last von je 11,75 *t*.

Diese Zahlen bilden die Grundlage zu dem durch die Figur 1 dargestellten *Cremona*'schen Kräfteplane. Die hieraus gewonnenen Kräfte wurden sodann durch die Flächeninhalte der Stabquerschnitte dividirt und die Quotienten als spezifische Hauptspannungen in der Figur 2 eingeschrieben. (Vgl. die unten folgende Tabelle).

Für die Diagonalen des Mittelfaches ergibt der Kräfteplan die Spannung Null; thatsächlich erfahren jedoch diese Stäbe infolge der elastischen Verkürzung der Pfosten eine kleine Druckspannung. Wir haben diese mit Hülfe der im vierten Kapitel (Nr. 37) entwickelten Beziehungen über statisch unbestimmte Fachwerke berechnet und die früheren Ergebnisse danach abgeändert. So erklärt es sich, dass für die Stabkräfte des Mittelfaches die Tabelle nicht ganz mit dem Kräfteplan übereinstimmt.

Nun wurden nach Anleitung der Textfigur 90 (S. 176) in jedem Dreiecke der Figur 2 die Höhenlote eingezeichnet, auf diesen die Hauptspannungen σ aufgetragen und durch deren Endpunkte Parallelen zu den entsprechenden Stabrichtungen gezogen. Für positive Spannungen sind diese Parallelen dünn, für negative dick ausgezogen. (Spannungen unter 20 *kg* wurden vernachlässigt).

Mit dem Zirkel in der Hand konnte man jetzt (vgl. S. 177) die Winkeländerungen $E\delta$ leicht bestimmen; sie sind in der Figur 3, in welcher jedem Dreieck ein Strich entspricht, aufgetragen. Die beigeschriebenen Zahlen heben jede Zweideutigkeit;

*) Siehe *Heinzerlings* Brücken der Gegenwart, Heft III, Tafel III.

Zahlen oberhalb des Striches bedeuten positive, Zahlen unterhalb negative δ.

Stab	Länge s	Quer-schnitt F	Stabkraft S	Haupt-spannung σ	Trägheits-moment J	$J:s$
	m	cm	kg	$kg : cm^2$	cm^4	
1 2	4,05	130	— 88 600	— 682	6856	1692
2 3	4,05	130	— 88 900	— 684	6856	1692
3 4	4,11	130	— 75 100	— 575	6856	1670
4 5	4,93	94	— 67 400	— 717	4292	872
5 6	4,05	$88^1/_2$	+ 55 300	+ 625	3697	912
6 7	4,05	$91^1/_2$	+ 55 300	+ 604	3770	932
7 8	4,05	114	+ 74 100	+ 650	4879	1205
8 9	4,05	138	+ 89 200	+ 646	6940	1713
4 6	2,81	96	+ 11 740	+ 122	783	—
3 7	3,50	96	— 1 400	— 15	783	—
2 8	3,50	96	— 790	— 8	783	—
4 7	4,93	$45^1/_2$	+ 22 700	+ 499	1160	—
3 8	5,35	$45^1/_2$	+ 19 700	+ 433	1160	—
2 9	5,35	24	— 340	— 14	220	—

So wurden beispielsweise, um im Dreiecke 4 5 6 die Aenderung des Winkels 4 zu bestimmen, die durch Klammern eingefassten Strecken zusammengefügt. Die dem Stabe 5 6 entsprechende Strecke ist positiv; von den beiden übrigen ist die eine negativ (4 5) die andre null; die beiden eingeklammerten Strecken sind daher zu addiren. Ihre Summe ist in der Figur 3 wiederum durch eine Klammer eingefasst.

In gleicher Weise wurden die Aenderungen der Winkel 5 und 6 bestimmt; die Summe aller drei Aenderungen muss stets null sein.

Um nun die gesamten Winkeländerungen für die verschiedenen Knotenpunkte zu erhalten, hat man nur die jedem Knoten zufallenden Strecken mit dem Zirkel aneinander zu fügen. Für den Knotenpunkt 4 sind die drei in Betracht fallenden Strecken durch Sternchen näher bezeichnet. Die erhaltenen Summen sind in der Figur 4 auf die entsprechenden Verticalen übertragen und ihre Endpunkte durch kleine Ringe angedeutet worden. Für die Knotenpunkte 1 bis 5 ist diese Summe positiv (+), für die folgenden 6 bis 9 negativ (—) ausgefallen.

In der Figur 4 sind ferner die Festlinien bestimmt worden. Zunächst streckte man die Gurtungsstäbe 1 bis 9 in eine einzige Gerade aus. Dann zog man die Drittelslinien und hierauf unter Benutzung der Zahlenwerte $J : s$, die b-Linien. (Vgl. Textfig. 108 S. 197). Alsdann folgte nach der in der vorigen Nummer gegebenen Anleitung die Bestimmung der Festpunkte; sie sind durch kleine Ringe bezeichnet; die Festlinien sind strichpunktirt.

Die Figur 5 zeigt die Bestimmung der Strecken μ. (Textfig. 108, S. 197). Ausgehend von dem ursprünglich beliebig gewählten Punkte P_1 wurde entsprechend der Textfigur 109 der Punkt P_2, dann P_3 etc. bestimmt. Die unveränderliche Strecke a wurde dabei gleich 4,05 m, gleich der am häufigsten vorkommenden Stablänge gewählt. Die im Abstande a aufzutragenden Strecken $E\,\delta$ wurden der Figur 4 entnommen. Für die drei ersten Stäbe sind die notwendigen Hülfslinien punktirt ausgezogen und die aufgetragenen Strecken mit Klammern eingefasst; positive Strecken werden abwärts, negative aufwärts aufgetragen. Im achten Felde angelangt, überträgt man aus Gründen der Symmetrie den Punkt P_8 wagrecht nach Q_8 und bestimmt nun rückwärts schreitend in gleicher Weise die Punkte Q_7, Q_6 etc. bis Q_1. Letzteren Punkt überträgt man wagrecht nach P_1 und beginnt die Arbeit von neuem. Dabei werden die Unterschiede immer kleiner und verschwinden bald ganz. In der Zeichnung sind nur die richtigen Punkte angegeben.

Durch Verbindung der zusammen gehörenden P- und Q-Punkte gelangt man jetzt zu dem ausgezogenen Linienzug und mit dessen Hülfe zu den gesuchten Strecken μ, welche je im Abstand $^1/_3 a$ von den Drittellinien auf lotrechten Linien abgeschnitten werden. (Vgl. den Stab 4 5.)

Was das Vorzeichen der μ betrifft, so ist für jeden Stab das linksseitige positiv oder negativ, je nachdem es unter- oder oberhalb der Horizontalen liegt, das rechtsseitige umgekehrt positiv, wenn es oberhalb, negativ, wenn es unterhalb abgeschnitten wird.

In der Figur 6 sind hierauf die μ für die Streben ermittelt worden. Auch hier wird Alles mit Zirkel und Lineal ausgeführt. Die Textfigur 111 (S. 202) gibt dazu die nötige Anleitung.

Um beispielsweise den Stab 2 8 zu behandeln, hat man zuerst die Strecke 2 aus dem Dreiecke 2 3 8 der Figur 3 und die beiden μ des Stabes 2 3 aus der Figur 5 zu vereinigen. Jene Strecke ist positiv; von den beiden μ ist das anstossende (2) negativ, das abstehende (3) positiv. Man verdoppelt

daher das erstere, fügt das letztere hinzu und zieht das Ganze von der Strecke 2 ab; dann erhält man die Strecke $\overset{+}{2}$ in der Figur 6. Um zweitens $\overset{+}{8}$ zu erhalten, verbindet man die Strecke 8 des Dreieckes 2 8 9 aus der Figur 3 mit den beiden μ des Stabes 8 9 aus der Figur 5. Jene Strecke ist negativ. Von den beiden μ ist das anstehende (8) positiv, das abstehende (9) negativ; man hat daher jenes zu verdoppeln, dieses hinzuzufügen und von der Summe die Strecke 8 aus der Figur 3 abzuziehen.

Die in der Figur 6 bestimmten μ haben stets das Vorzeichen der benachbarten Aussenstrecken.

Um endlich aus den μ die secundären Spannungen zu finden, hat man sie wie früher (vgl. S. 187) mit $6\,e : s$ zu multipliciren, wobei s die Stablänge und e die halbe Stabbreite, beziehungsweise die Entfernung der äussersten Kante von der Schwerlinie bedeutet. Die Figur 7 gibt ein übersichtliches Bild von der Grösse dieser Spannungen. Das Vorzeichen derselben ergibt sich aus demjenigen der μ. Uebrigens ist ein Irrtum kaum möglich: Die Art der Verbiegung der Gurtungsstäbe (ob einfach oder doppelt) geht aus dem Linienzug der Figur 5 unverkennbar hervor, und was die Streben betrifft, so sind sie einfach gekrümmt, wenn die beiden Linien in der Figur 6 sich kreuzen (Diagonalen), dagegen doppelt, wenn die beiden Linien sich nicht kreuzen (Pfosten). —

Man mag die Spannungen, welche aus der starren Vernietung der Fachwerkstäbe entstehen, berechnen, wie man will — die Arbeit bleibt stets umständlich. Unter den verschiedenen Verfahren, welche zur Erreichung des Zieles bis dahin vor- und eingeschlagen worden sind, ist wohl keines so kurz wie das *Landsberg*'sche, und dass sich dieses Ziel fast ganz auf zeichnerischem Wege erreichen lässt, verleiht ihm noch erhöhte Bedeutung. Seine Genauigkeit ist keine vollständige; sie genügt jedoch in den meisten Fällen, weil es gewöhnlich nur darauf ankommt, die ungefähre Grenze anzugeben, bis zu der die Spannung im schlimmsten Fall ansteigt und dadurch den Entwerfer der Brücke in den Stand zu setzen, durch stellenweise Verstärkungen allzugrosse Spannungen zu vermeiden.

Um uns von der Zuverlässigkeit des Verfahrens ein Bild machen zu können, haben wir das nämliche Beispiel nach dem früher beschriebenen Verfahren durchgearbeitet. Dabei ergaben sich für die Nebenspannungen an den Stabenden Abweichungen von im Durchschnitt 11—12 *kg* pro cm^2. Eine dritte Berechnung, bei der auch auf die Faktoren x und x' der Nummer 44 (S. 182) Rücksicht genommen wurde, ergab gegenüber dem *Landsberg*'schen Verfahren einen durchschnittlichen Unterschied von 15 *kg*. Die Abweichungen sind bald positiv bald negativ; irgend eine Regelmässigkeit in ihrer Verteilung liess sich nicht erkennen.

51. Schlussbetrachtungen.

Eine sorgfältigere Untersuchung der Nebenspannungen eines Fachwerkes sollte sich nicht mit dem Falle der vollständigen Belastung begnügen, sondern auch einseitige Belastungen in Berücksichtigung ziehen, weil bei diesen die Streben ihre grössten Hauptspannungen erleiden. Den sichersten Aufschluss über die Grenzen, welche die Summe von Haupt- und Nebenspannung erreichen kann, erlangt man jedoch dadurch, dass man an den verschiedenen Knotenpunkten Einzellasten auflegt, deren Einfluss auf sämtliche Stäbe ermittelt und hierauf für jedes Stabende eine Einflusslinie zeichnet. Dieser Weg erfordert aber viel Zeit und lässt sich überdies nur einschlagen, wenn keine Gegenstreben vorhanden sind, die abwechselnd mit Hauptstreben in Thätigkeit treten.

Die Vermutung liegt zwar nahe, dass die Nebenspannungen für sich allein bei vollständiger Belastung am stärksten ausfallen möchten. Bei den Streckbäumen mag dies zutreffen, weil diese von jeder neuen Last in demselben Sinne verbogen werden. Bei den Streben bestätigt sich diese Vermutung nicht; hier dürfte es selbst einem geübten Auge schwer fallen, auch nur die Art der Verbiegung, mit andern Worten das Vorzeichen der Nebenspannung bei verschiedenartigen Belastungen von vornherein anzugeben. Mit blossem Schätzen geht man hier, wie wir uns überzeugt haben, oft stark fehl.

Immerhin wird ein nachdenkender Brückenbauer schon dem Ergebnis, welches die Behandlung der vollständigen Belastung liefert, die nötigen Winke entnehmen. Er wird aus diesem Ergebnis nicht nur ersehen, wie hoch sich die Nebenspannung in den Gurtungen beläuft, sondern auch herauslesen, bis zu welchem Betrage die Spannung in den Streben annähernd steigen kann. Dann wird er die „zulässige“ Spannung von Stab zu Stab um den Betrag der Nebenspannung erniedrigen, mit andern Worten die Querschnitte entsprechend erhöhen, damit die Summe beider Werte das zulässige Mass nicht überschreite. —

Auch die folgende Erwägung mag schliesslich noch zur Klarlegung dieser Angelegenheit beitragen.

Denkt man sich die Trägheitsmomente sämtlicher Stabquerschnitte im gleichen Verhältnisse vergrössert oder verkleinert, so bleiben die μ unverändert, und die secundären Spannungen werden nur dann andre, wenn sich zugleich die e oder die Breiten der Stäbe ändern. Die Nebenspannungen sind daher in erster Linie von den Stabbreiten abhängig. Es ergibt sich hieraus die Regel, die Stäbe eines Fachwerkes so schmal zu machen, als es die Anforderungen richtiger Vernietung und die Rücksicht auf die Knickgefahr der gedrückten Stäbe gestatten.

Lässt man sämtliche Stablängen im nämlichen Verhältnisse zunehmen, vergrössert (der grösseren Spannweite entsprechend) in gleichem Masse auch die Gesamtlast, verbreitert zugleich, um grössere Querschnitte und dadurch gleiche Hauptspannungen zu erhalten, die Stäbe, so bleiben die Winkeländerungen δ, sowie die Werte μ annähernd dieselben; und da sich auch das

Verhältnis e zu s nicht wesentlich ändert, so gelangt man zu ungefähr gleichen Werten der Nebenspannungen. Daraus folgt, dass Fachwerke verschiedener Spannweite, deren Stäbe eine zur Länge proportionale Breite besitzen, annähernd gleiche Nebenspannungen erwarten lassen. Am schlimmsten steht es hiernach mit den Trägern kleiner Oeffnung, weil diese in der Regel verhältnismässig grosse Stabbreiten zeigen.

Sechstes Kapitel.

Räumliche Fachwerke.

52. Allgemeine Eigenschaften der räumlichen Fachwerke.

Gleich wie das Dreieck das Element des ebenen Fachwerkes bildet, so bildet das Vierflach das Element des räumlichen Fachwerkes, und wie durch Aneinanderreihen von Dreiecken ein ebenes Fachwerk entsteht, so kann man durch Aneinanderfügen von Tetraedern ein räumliches Fachwerk bilden.

Das aus Stäben gebildete Vierflach besitzt vier Knotenpunkte und sechs Stäbe; jeder neu hinzukommende Punkt muss, wenn ein starres Gebilde geschaffen werden soll, durch drei neue Stäbe mit den schon vorhandenen verbunden werden; es entsprechen somit 5 Knotenpunkten 9 Stäbe, 6 Punkten 12 Stäbe etc. Allgemein ist, wenn im räumlichen Fachwerke k die Anzahl der Punkte und s die Anzahl der Stäbe bezeichnet,

$$s = 3\,k - 6.$$

Greifen in den Ecken eines Stabdreieckes drei in dessen Ebene liegende und unter sich im Gleichgewicht befindliche Kräfte an, so lassen sich bekanntlich die drei Stabkräfte eindeutig bestimmen. Ebenso können die in den Stäben eines Vierflaches wirkenden Kräfte eindeutig bestimmt werden, wenn auf die vier Ecken desselben Kräfte einwirken, die sich das Gleichgewicht halten; denn jede an einem Knotenpunkt angreifende Kraft kann eindeutig nach den Richtungslinien von drei Stäben zerlegt werden, vorausgesetzt, dass diese Stäbe nicht in der nämlichen Ebene liegen. Ist beispielsweise

die Kraft P in drei Einzelkräfte zu zerlegen, welche in den Linien a, b und c wirken, so legt man durch P und a eine Ebene, welche die Ebene von b und c in der Linie a' schneiden möge, und zerlegt zunächst P in zwei Kräfte nach a und a' und hierauf die letztere Seitenkraft nochmals nach b und c. Kehrt man die Pfeile der drei Einzelkräfte um, so stehen die Kräfte selbstverständlich im Gleichgewicht.

Hat man nun auf die oben angegebene Weise ein räumliches Fachwerk gebildet und greifen an den Knotenpunkten desselben Kräfte an, die sich im Gleichgewicht halten, so lassen sich die inneren Kräfte dadurch finden, dass man von Punkt zu Punkt schreitet und an jedem Punkte Gleichgewicht zwischen den daselbst zusammentreffenden inneren und äusseren Kräften herstellt. Es entspricht dieser Vorgang dem *Cremona*'schen Verfahren zur Berechnung ebener Fachwerke.

Gelingt es, durch das räumliche Fachwerk Querschnitte zu legen, welche nicht mehr als sechs Stäbe treffen, so können die in diesen Stäben wirkenden Kräfte dadurch bestimmt werden, dass man die ausserhalb des Schnittes angreifenden äusseren Kräfte zusammensetzt und deren Mittelkräfte nach den Richtungslinien der sechs geschnittenen Stäbe zerlegt. Diese Aufgabe ist ebenfalls eindeutig lösbar, vorausgesetzt, dass von den sechs Stäben nicht mehr als drei durch einen Punkt gehen und nicht mehr als drei in einer Ebene liegen.

Die Figuren 113 und 114 stellen Fachwerke dar, die durch

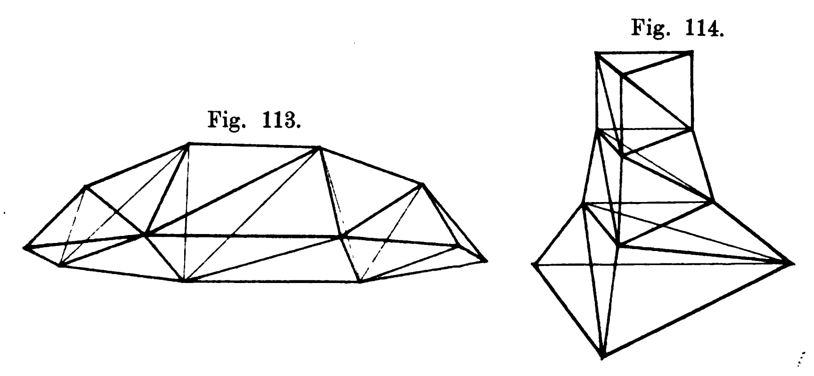


Fig. 113.

Fig. 114.

Aneinanderreihen von Tetraedern entstanden sind und auf ihrer ganzen Länge Querschnitte zulassen, welche nur sechs Stäbe treffen. Die Zahl der Knotenpunkte ist in beiden Figuren gleich 12, die

Zahl der Stäbe gleich 30; die Bedingung $s = 3k - 6$ ist demnach erfüllt.

Während das regelmässige ebene Fachwerk zwei Gurtungen und zwischen denselben einen ununterbrochenen Zug von Streben besitzt, zeigt uns das regelmässige räumliche Fachwerk drei Gurtungen und drei, die Knotenpunkte dieser Gurtungen verbindende Strebenzüge.

Leider sind aber die räumlichen Fachwerke in der Anwendung höchst selten in dieser einfachen Weise zusammengesetzt. Weitaus die meisten sind, den praktischen Bedürfnissen entsprechend, anders geformt. Die Zahl der Gurtungen beträgt in der Regel vier oder mehr, und die Aneinanderreihung der Stäbe lässt nur ausnahmsweise eine Zerlegung in Tetraeder zu. Zwei Beispiele dieser Art sind in den Figuren 115 und 116 dargestellt. In ersterem ist die Zahl der Knotenpunkte gleich 20, diejenige der Stäbe gleich 54; in letzterem ist $k = 16$, $s = 42$; in beiden ist demnach $s = 3k - 6$. Durchgelegte Schnitte treffen aber wenigstens 8 Stäbe.

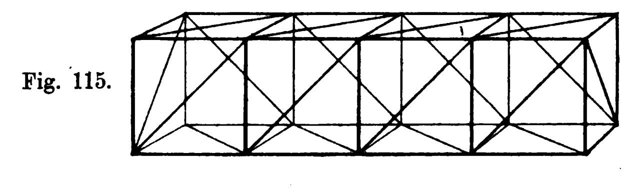


Fig. 115.

Fig. 116.

Es folgt daraus, dass hier die Stabkräfte im Allgemeinen nicht nach dem Schnittverfahren (auch nicht nach dem Momentenverfahren, vgl. die Nrn. 4 und 6) bestimmt werden können, ganz abgesehen davon, dass die Zerlegung einer Kraft in sechs Einzelkräfte, welche hierbei nötig wäre, eine höchst umständliche Aufgabe ist. Es bleibt vielmehr bei der Berechnung der räumlichen Fachwerke meistens kein anderes Mittel übrig, als nach *Cremona*'s Vorgang, von Punkt

zu Punkt schreitend, Gleichgewicht zwischen äusseren und inneren Kräften herzustellen.

Auch dieser Weg ist vielfach mit Hindernissen besetzt. Man stösst dabei häufig auf Knotenpunkte, von welchen mehr als drei unbekannte Kräfte ausgehen. Liegen von diesen Kräften alle ausser einer in einer Ebene, so lässt sich zunächst diese eine Kraft bestimmen. In anderen Fällen kann man sich Symmetrieverhältnisse zu Nutze machen. Reicht auch dieses Mittel nicht aus, so muss eine Stabkraft beliebig angenommen und später, wenn sich Widersprüche zeigen, geändert werden. (Vgl. S. 11). Es leuchtet ein, dass die statische Berechnung eines räumlichen Fachwerkes stets eine mehr oder weniger verwickelte Aufgabe sein wird.

Da sich das Schnittverfahren nicht anwenden lässt, so muss man es auch aufgeben, bezüglich der ungünstigsten Belastungen allgemeine Gesetze abzuleiten. Man kann sich nur dadurch über diesen Punkt Klarheit verschaffen, dass man an verschiedenen Knotenpunkten Einzellasten auflegt und nachsieht, in welchem Sinne sie die Stäbe in Anspruch nehmen. Glücklicherweise liegen die Verhältnisse meistens so einfach, dass diese Frage schon durch einige Ueberlegung entschieden werden kann.

Bei allen diesen Betrachtungen ist vorausgesetzt, dass das Fachwerk statisch bestimmt sei und dass die Stabkräfte mit den Längsaxen der materiellen Stäbe zusammenfallen. In der Praxis begegnen wir jedoch häufig Fachwerken mit mehr Streben (beziehungsweise mehr Auflagerbedingungen), als zur statischen Bestimmtheit durchaus erforderlich sind. So lange es sich dabei blos um Haupt- und Gegenstreben handelt, die sich je nach der Belastung gegenseitig ersetzen, wird die statische Bestimmtheit nicht gestört. Steigt jedoch die Anzahl der zu gleicher Zeit in Thätigkeit stehenden Stäbe über die erforderliche Anzahl hinaus, so können die Stabkräfte nur unter Berücksichtigung der elastischen Formänderungen genau ermittelt werden. Stellen dabei die überflüssigen Stäbe blos zweite Diagonalen in bereits versteiften Stabvierecken dar, so kann in ähnlicher Weise wie in der Nummer 37 vorgegangen werden. Andernfalls muss man auf das Gesetz der virtuellen Arbeit zurückgreifen. Zuweilen kann man sich auch einfacher durch Berücksichtigung der Formänderung einzelner Stabgruppen helfen.

Die zweite Voraussetzung, dass die Stabkräfte mit den Stab-

axen zusammenfallen, wird selbstverständlich nur dann erfüllt, wenn man die Knotenpunkte mit reibungslosen Kugel- oder Universalgelenken versehen könnte, was in der Wirklichkeit niemals der Fall ist. Es läge uns daher die Pflicht ob, auch für die räumlichen Fachwerke die Neben- oder Zusatzspannungen zu berechnen, welche aus den starren Knotenverbindungen entstehen, wie es im fünften Kapitel für die ebenen Fachwerke geschehen ist. Unmöglich wäre die Lösung dieser Aufgabe wohl nicht, aber zweifellos sehr langwierig und zeitraubend. So viel uns bekannt ist, hat sie bis jetzt Niemand ernstlich in Angriff genommen.

53. Die Auflagerung der räumlichen Fachwerke.

Ein räumliches Fachwerk ist genügend sicher anfgelagert, wenn sechs seiner Knotenpunkte an flächenförmige Auflagerbahnen gebunden werden, in der Meinung, dass sie sich in der Ebene dieser Bahnen in jeder Richtung ohne Widerstand bewegen, dieselbe jedoch nicht verlassen können. Man kann sich, positive Auflagerdrücke vorausgesetzt, unter einer solchen Auflagerbahn etwa einen Stuhl denken, unter welchem sich frei bewegliche Kugeln, oder constructiv richtiger, zwei übereinander gestellte, in verschiedener Richtung laufende Rollenlager befinden. Der Auflagerdruck wird hierdurch gezwungen, auf der Bahn senkrecht zu stehen, und da sich ein räumliches Kräftesystem stets eindeutig in sechs Kräfte überführen lässt, die in sechs gegebenen Geraden liegen, so sind sechs solcher Auflagerbahnen ausreichend, um das Fachwerk bei jeder Belastung zu unterstützen. Nur muss dafür gesorgt werden, dass höchstens drei Auflagerdrücke durch einen Punkt gehen und höchstens drei in einer Ebene liegen.

Besitzt das Fachwerk mehr als sechs Auflagerbahnen, so ist es statisch unbestimmt, kann aber unter Umständen durch Entfernung gewisser Stäbe wieder statisch bestimmt werden. Wenn s die Zahl der Stäbe, k die Zahl der Knotenpunkte und a die Anzahl der Auflagerbahnen bedeutet, so gilt daher für ein statisch bestimmtes Fachwerk allgemein die Beziehung

$$s = 3\,k - a.$$

In der Wirklichkeit kommen niemals einzelne Auflagerbahnen vor; diese sind vielmehr stets zu zweien oder dreien vereinigt.

Vereinigt man zwei Bahnen in eine, so nötigt man den betreffenden Knotenpunkt, auf einer Linie zu gleiten; der Druck, den das Fachwerk an dieser Stelle auf seine Unterlage ausübt, muss dann in der zu dieser Linie senkrechten Ebene liegen, kann aber sonst beliebig gerichtet sein. In der Ausführung entspricht der Doppelbahn ein gewöhnliches Rollenlager. Durch Vereinigung von drei (sich schneidenden) Bahnen erhält man einen nach allen Richtungen unverschieblichen Punkt, der somit beliebig gerichtete Auflagerdrücke aufnehmen kann.

Es ist hiernach klar, dass das räumliche Fachwerk sehr verschiedenartig gelagert sein kann. Doch ist dabei zu beachten, dass die einfachen, doppelten und dreifachen Auflagerbahnen nicht ganz willkürlich gewählt werden dürfen.

Gleichwie beim ebenen Fachwerke mit einem festen und einem beweglichen Auflager die Senkrechte zu Letzterem nicht durch den festen Auflagerpunkt gehen darf, so darf auch beim räumlichen Fachwerke die Senkrechte zu einer Bahn nicht durch einen festen Knotenpunkt (eine dreifache Bahn) gehen.

Ferner sind ausgeschlossen: Eine einfache und eine doppelte Bahn, wenn die Normale zur ersteren durch den Knotenpunkt der letzteren geht und auf der Geraden der doppelten Bahn senkrecht steht; zwei Doppelbahnen, wenn die beiden, die Auflagerdrücke enthaltenden Ebenen sich decken; eine zweifache und eine dreifache Bahn, wenn die Ebene der ersteren den Knotenpunkt der letzteren enthält; ferner zwei dreifache Bahnen, und endlich eine einfache, eine doppelte und eine dreifache Bahn, wenn die Normale zu ersterer die Verbindungslinie der beiden andern Knotenpunkte schneidet. In allen diesen Fällen kommen entweder mehr als drei Auflagerdrücke in einer Ebene vor, oder es gehen mehr als drei durch einen Punkt, was unzulässig ist, falls das Fachwerk beliebige Belastungen tragen soll. Nur wenn das Fachwerk weniger Stäbe hat als $3k-6$ und demzufolge mehr als 6 Auflagerbahnen nötig werden, können obige Ausnahmen unter Umständen zulässig sein.

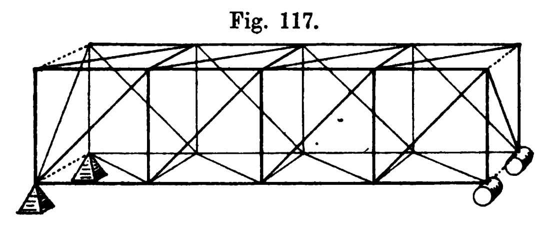
Unter den verschiedenen möglichen Auflagerungen mit sechs Bahnen verdient aus Analogie mit dem ebenen Fachwerke diejenige besondere Beachtung, bei welcher eine einfache, eine doppelte und eine dreifache Bahn vorkommen. Werden die oben aufgezählten unzulässigen Anordnungen ausgeschlossen, so können diese drei Auflager stets allen möglichen Belastungen genügen.

Der Knotenpunkt A sei an eine einfache, B an eine doppelte und C an eine dreifache Bahn gebunden. Nennt man dann die Senkrechte zum ersten Auflager α, die Ebene des zweiten β, die drei gesuchten Kräfte kurz A, B und C, und soll eine gegebene äussere Kraft P in die drei Einzelkräfte zerlegt werden, so

lege man durch C eine Gerade, welche P und a schneidet und bestimme deren Durchstosspunkt B' mit der Ebene β. Dann ist $B B'$ die Richtung des Auflagerdruckes B; denn die Gerade $C B'$ wird von allen vier Kräften geschnitten, wie es sein muss, wenn diese sich im Gleichgewicht halten sollen. Nun projicirt man den Punkt C und die Kräfte P und B auf eine Normalebene zu a. Dann müssen die Projectionen der Kräfte in Bezug auf die Projection von C gleiches statisches Moment haben; hieraus lässt sich die Grösse von B ermitteln. Durch Projection auf eine Normalebene zu $B B'$ findet man in gleicher Weise die Grösse der Kraft A. Endlich wird die Kraft C durch ein Kräftepolygon derart bestimmt, dass die Summe der drei Kräfte gleich P ist.

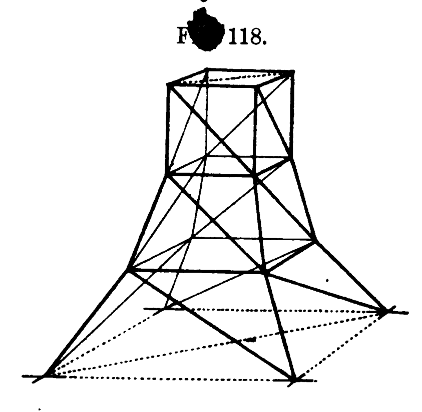
Dieser allgemeine Weg dürfte freilich selten nötig sein, da die Lage der Auflagerpunkte und der belastenden Kräfte in der Regel so einfach ist, dass sich die Auflagerkräfte durch kurze Ueberlegung angeben lassen.

Fig. 117.



In der soeben besprochenen Weise liesse sich allenfalls ein dreiseitiger Pfeiler (Fig. 114) aufgelagert denken. Die meisten Auflagerungen unserer räumlichen Fachwerke weichen jedoch davon ab. Eiserne Fachwerkbrücken, als räumliche Fachwerke betrachtet, besitzen in der Regel zwei feste und zwei Rollenauflager, also streng genommen zehn Auflagerbahnen. Man hat daher vier Bahnen zu viel und kann diese beseitigen oder aber vier Stäbe entfernen, ohne das Fachwerk unstabil zu machen. So ist beispielsweise das obenstehende Fachwerk (Fig. 117) mit 20 Knotenpunkten, 50 Stäben und 10 Auflagerbahnen statisch bestimmt. Ein Vergleich mit der Figur 115 (S. 210) zeigt, dass die vier letzten Querstäbe weggelassen sind. Auch lehrt ein Versuch, dass sich die Stabkräfte bei beliebigen äusseren Be-

Fig. 118.



lastungen eindeutig ermitteln lassen. In der Ausführung behält man indessen die genannten Stäbe stets bei und setzt sich mit gewissen zulässigen Annahmen über die Unbestimmtheit hinweg.

Als zweites Beispiel fügen wir den vierseitigen Pfeiler (Fig. 118) bei, welcher gegenüber der auf der Seite 210 dargestellten Anordnung sechs (punktirt angedeutete) Stäbe eingebüsst, dafür aber vier feste Auflagerpunkte erhalten hat. Hier ist $s = 36, k = 16, a = 12$, somit in der That $s = 3k - a$.

In der nämlichen Weise lassen sich fünf- und mehrseitige Pfeiler, oder was auf dasselbe hinausläuft, polygonale Kuppeln aufstellen. Das kuppelförmige Fachwerk auf der Tafel 6 besitzt zum Beispiel 40 Knotenpunkte, 96 Stäbe und 8 feste Auflagerknoten, also 24 Auflagerbahnen; die Bedingung $s + a = 3k$ ist somit auch hier erfüllt.

54. Die Windverstrebungen der Brückenfachwerke.

Die Brückenfachwerke haben neben der lotrechten Belastung auch die wagrechten Kräfte zu tragen, welche der Wind hervorruft; Eisenbahnbrücken mit gekrümmter Bahnlinie müssen überdies die Flugkraft der Fahrzeuge aufnehmen.

Um die Brücken zum Tragen dieser Kräfte zu befähigen, versieht man sie in der Regel mit wagrechten Querriegeln und Streben, welche zusammen mit den Gurtungen wagrechte Fachwerke bilden. Infolge dessen muss die Brücke häufig als räumliches Fachwerk angesehen und berechnet werden.

Eine genaue statische Berechnung der Kräfte, welche der Wind in den verschiedenen Teilen der Brücke hervorruft, ist in manchen Fällen schwierig und umständlich, weil die elastischen Formänderungen berücksichtigt werden müssen. Gewöhnlich wird deshalb eine angenäherte Berechnungsweise vorgezogen. Eine solche ist um so gerechtfertigter, als man die Grösse des Winddruckes nicht mit Sicherheit angeben kann. Schon die Berechnung der Fläche, auf welche der Wind trifft, ist eine unsichere, weil zwei oder mehr Tragwände hintereinander stehen. Sodann besitzt man auch hinsichtlich der Grösse des Druckes auf den Quadratmeter Angriffsfläche keine ganz zuverlässigen Anhaltspunkte. Gewöhnlich setzt man den spezifischen Druck für die leere Brücke höher an, als für

die belastete und sieht nach, welche von beiden Annahmen die ungünstigere ist. Die üblichen Zahlenwerte sind jedoch schwankend je nach der Gegend, in der sich die Brücke befindet und nach der Lage, die sie gegenüber der Thalrichtung einnimmt.

Die Grösse der Flugkraft bei gekrümmter Bahnlinie kann aus der Fahrgeschwindigkeit und dem Krümmungshalbmesser mit genügender Genauigkeit berechnet werden.

Man kann hinsichtlich der Anordnung der Querverbände drei Hauptfälle unterscheiden:

1) Die Fahrbahn liege in der Höhe der unteren Gurtung; die oberen Gurtungen seien nicht verbunden.

In diesem Falle bringt man in der Höhe der Fahrbahn wagrechte Streben (Windstreben, Horizontalkreuze, Windkreuze) an, welche im Vereine mit den Querträgern und unteren Gurtungen ein wagrechtes, ebenes Fachwerk bilden. Die statische Berechnung dieses Windfachwerkes erfolgt auf Grund des gegebenen Winddruckes ganz so wie die Berechnung von lotrechten Fachwerken mit parallelen Gurtungen.

Um die grösste Beanspruchung der Windstreben zu finden, unterscheidet man häufig zwischen dem Winddrucke, der auf die Brücke einwirkt und demjenigen, der die Fahrzeuge trifft, und führt letzteren als veränderliche Belastung ein.

Was die Gurtungen betrifft, so entsteht in der dem Winde zugewandten unteren Gurtung eine Druckspannung, in der vom Winde abgewandten Gurtung eine Zugspannung, welche zu der von der lotrechten Belastung herrührenden Spannung hinzuzufügen ist. Nennt man den gesamten Winddruck W und die Breite der Brücke (den Abstand beider Tragwände) b, so ist diese Zusatzspannung in der Mitte der Spannweite gleich $\frac{W l}{8 b}$. Sind die oberen Gurtungen den unteren parallel und nennt man die Fachwerkshöhe h, so erhält man die nämliche Spannung, wenn man das lotrechte Fachwerk mit $\frac{W h}{b}$ belastet. Man kann daher die Gesamtspannung der unteren Gurtung auch so berechnen, dass man zu der lotrechten Belastung die (gleichförmig verteilt gedachte) Last $\frac{W h}{b}$ hinzufügt.

Da der Mitteldruck des Windes höher liegt als die Windverstrebung, so entsteht ausserdem ein Drehmoment, infolge dessen die

dem Winde zugewandte Tragwand etwas entlastet, die abgewandte um ebenso viel belastet wird. Bestimmt man die Mittelkraft des gesamten Winddruckes und nennt deren Entfernung von den Windkreuzen w, so ist dieses Drehmoment gleich Ww und die daraus entspringende Ent- und Belastung der Tragwände gleich $\frac{Ww}{b}$.

Der Gesamteinfluss des Windes auf die Gurtungen und Streben des Fachwerkes lässt sich somit dadurch finden, dass man zu der lotrechten Belastung für die obere Gurtung und die Streben $\frac{Ww}{b}$, für die untere Gurtung $\frac{W\,(w+h)}{b}$ hinzufügt.

Zu den bisher besprochenen Wirkungen des Windes kommt noch hinzu, dass die Tragwände, vornehmlich die Pfosten und die Querträger auf Biegung in Anspruch genommen werden. Erstere werden einfach, letztere S-förmig gebogen. Die Grösse der Biegungsmomente lässt sich unschwer berechnen. —

Der Fall, wo die Fahrbahn zwischen der unteren und oberen Gurtung aufgehängt wird, lässt sich auf den vorigen zurückführen. Bringt man die Windstreben in der Höhe der unteren Gurtung an, so ändert sich nichts weiter, als dass die Biegungsmomente der Pfosten und Querträger andere werden. Die genaue Berechnung dieser Momente verlangt ein Eintreten auf die elastischen Formänderungen; doch genügt meistens eine angenäherte Berechnung. Bringt man die Windstreben dicht unter der Fahrbahn an, so fehlen dem Windfachwerke die Streckbäume. Zerlegt man die Windstrebenkräfte parallel zur Längs- und Querrichtung der Brücke, so gehen die Längscomponenten auf die Pfosten der Tragwände über. Diese biegen sich in der Ebene der Tragwand aus und übertragen dadurch die genannten Längskräfte auf die unteren und oberen Gurtungen. Von dieser Betrachtung ausgehend lässt sich die statische Berechnung leicht durchführen. Die Windstreben selbst werden in allen Fällen gleich stark beansprucht.

2) Die Fahrbahn liege in der Höhe der unteren Gurtung; die oberen Gurtungen seien durch Querstäbe und Windkreuze verbunden.

Könnte man ein Fachwerk dieser Klasse an den Auflagern mit lotrechten Querkreuzen versehen, so erhielte man ein stabiles räumliches Fachwerk. Doch lassen sich diese Kreuze höchstens bei aussergewöhnlich hohen Brücken anbringen. In der Regel fehlen sie; dann ist das Fachwerk unvollständig und kann den wagrechten Belastungen nur infolge der starren Verbindung der Pfosten und Querstäbe widerstehen.

Die genaue statische Berechnung dieser Fachwerke ist umständlich, da sie sich auf die Ermittlung der elastischen Formänderungen stützt. Die Kräfteverteilung hängt in hohem Masse von der Stärke der letzten Pfosten und Querriegel ab. Je kräftiger diese, die Brücke abschliessenden Querrahmen gebaut werden, jemehr sie einer Formänderung Widerstand leisten, desto mehr kommt das obere Windfachwerk zur Wirkung, weil ihm diese Rahmen an den Enden als Stützpunkte dienen. Je leichter sich dagegen diese Rahmen verbiegen lassen, in desto höherem Grade geht der auf die oberen Knotenpunkte treffende Winddruck auf die unteren Windstreben über, desto mehr nähert sich dieser Fall dem vorhergehenden.

Zu einer angenäherten Berechnung ist der folgende Weg empfehlenswert: Man übergibt der oberen Windverstrebung den Winddruck, der auf die obere Hälfte der Fachwerkswände trifft, der unteren den auf die untere Hälfte der Brücke und auf die Fahrzeuge treffenden Druck. Hiernach berechnet man die Stärke sämtlicher Windstreben, die Beanspruchung der Abschlussrahmen und die Spannungen, welche in den Gurtungen auftreten. Zu letztern kommen noch diejenigen hinzu, welche das Drehmoment des auf die Fahrzeuge treffenden Winddruckes hervorruft.

Es sei W_o der gesamte obere, W_u der gesamte untere Winddruck, w der Abstand des letzteren von den unteren Windkreuzen, b die Breite und h die Höhe der Brücke. Der Wind wehe von links nach rechts. Dann ruft W_o in der linken oberen Gurtung einen Druck, in der rechten einen Zug hervor; ebenso erzeugt W_u in der linken unteren Gurtung Druck, in der rechten Zug. Das Drehmoment entlastet die linke und belastet die rechte Tragwand mit einer Gesamtlast von $\frac{W_u\, w}{b}$; es ruft in der linken oberen Gurtung Zug, in der rechten Druck, in der linken unteren Gurtung Druck, in der rechten Zug hervor. In den oberen Gurtungen wirkt es somit dem Winddrucke W_o entgegen.

Will man diese Wirkungen dadurch berücksichtigen, dass man die lotrechte Belastung vergrössert, so beträgt die Vergrösserung für die obere Gurtung $\frac{W_o\, h - W_u\, w}{b}$, für die untere $\frac{W_u(h+w)}{b}$ und für die Streben $\frac{W_u\, w}{b}$. Fällt der erstere Wert negativ aus, so ist das ein Zeichen, dass der Einfluss des Drehmomentes denjenigen

des oberen Winddruckes übertrifft, dass somit nicht die linke, sondern die rechte obere Gurtung stärker beansprucht wird. In diesem Falle wechselt man einfach das Vorzeichen.

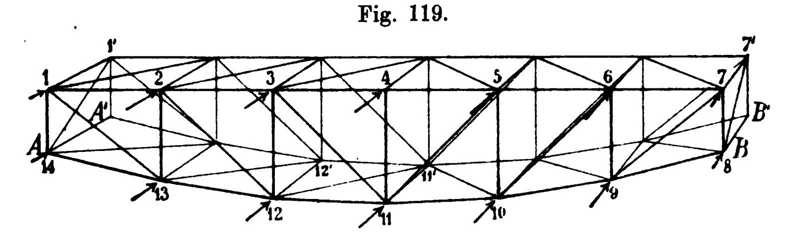
Die aus Endpfosten, Endriegel und Querträger gebildeten Abschlussrahmen haben den Winddruck W_0 auf die Auflager zu übertragen. Das grösste Biegungsmoment, welchem die Endpfosten in der Richtung quer zur Brücke zu widerstehen haben, ist bei sehr starken Querriegeln und Querträgern angenähert gleich $^1/_8\, W_0 h$, bei sehr schwachen Querriegeln gleich $^1/_4\, W_0 h$, lässt sich also angenähert schätzen. Es ist ratsam, den Endpfosten wo immer möglich die erforderliche Stärke zu geben.

3) *Die Fahrbahn liege in der Höhe der oberen Gurtung; der Brückenraum sei durch Querkreuze versteift.*

In diesem Falle besitzt das Fachwerk die zur Stabilität nötigen, meistens sogar überzählige Stäbe. Wir besprechen zuerst den Fall, wo nur die Endrahmen durch Streben versteift sind.

Bringt man durchgehends, sowohl in den lotrechten und wagrechten Wänden als auch in den Endrahmen lauter einfache Streben

Fig. 119.



an, so ist das Fachwerk statisch bestimmt, wie schon an der Figur 115 (S. 210) gezeigt worden ist. Auch das Fachwerk der Figur 119 gehört hierher. Es besitzt 28 Knotenpunkte und 78 Stäbe; somit ist, wie es die statische Bestimmtheit erfordert, $3\,k - s = 6$.

Das Fachwerk sei an den Endpunkten der unteren Gurtung aufgelagert; es sollen die Kräfte bestimmt werden, welche der auf die Brücke treffende, durch Pfeile dargestellte Winddruck in den Stäben hervorruft.

Der leichteren Uebersicht wegen trennt man am besten die auf den *oberen* Streckbaum entfallenden Kräfte ab und behandelt sie gesondert. Zufolge der geraden Richtung dieses Streckbaumes erhält man dann die Kräfte in den oberen Stäben durch einen ein-

fachen *Cremona*'schen Plan und hat schliesslich nur noch die in den Stäben 1 1′ und 7 7′ wirkenden Kräfte nach 1′ *A* und 1′ *A′* beziehungsweise 7′ *B* und 7′ *B′* zu zerlegen.

Die Behandlung der unteren Belastungen führt gleich anfangs auf räumliche Gebilde.

Man beginnt mit dem auf den Knoten 11 entfallenden Drucke. Dieser pflanzt sich nach 11′ fort und zerlegt sich dort der Symmetrie wegen in eine lotrechte und zwei gleich grosse, in den Stäben 11′ 10 und 11′ 12 wirkende Kräfte. Wie sich die lotrechte Seitenkraft in die fünf übrigen durch 11′ gehenden Stäbe zerlegt, bleibt vorläufig unbestimmt. Nun wird die Stabkraft 11′ 12 mit dem auf 12 treffenden Drucke vereinigt und die Mittelkraft in zwei Einzelkräfte zerlegt, von denen die eine in der vorderen Tragwand, die andere im Stabe 12 12′ liegt. Letztere Kraft geht nach 12′ über und wird daselbst wiederum in eine in der hinteren Tragwand liegende Kraft und in die Stabkraft 12′ 13 zerlegt. Mit letzterer verbindet man hierauf die Last 13 und fährt auf diese Weise fort, bis man am Auflager anlangt.

Mit dieser Arbeit sind die Kräfte in den Füllungsgliedern zwischen den beiden unteren Streckbäumen ermittelt, und man hat schliesslich nur noch aus den zu gleicher Zeit gefundenen, in der vorderen und hinteren Tragwand wirkenden Kräften je einen *Cremona*'schen Plan zu bilden, um auch die übrigen Stabkräfte kennen zu lernen.

Zur Ausführung dieser Zerlegungen hat man stets zwei Projectionen des Fachwerkes und der Kräftepolygone nötig, am besten diejenigen, in welchen die gegebenen Kräfte ohne Verkürzung erscheinen, also die Queransicht und den Grundriss des Fachwerkes.

Die ganze Zeichnung gestaltet sich so einfach, dass wir von der Anwendung auf ein Beispiel Umgang nehmen zu können glauben.

Auf dieselbe Weise kann der Einfluss des Windes ermittelt werden für den Fall, dass die Brücke mit Fahrzeugen belastet ist. Neben den wagrechten Kräften entstehen jetzt infolge des Drehmomentes noch lotrechte; sie wirken in der vorderen Wand aufwärts, in der hinteren abwärts. Der Gang der Arbeit ist der nämliche wie oben; nur hat man die neu hinzugekommenen Kräfte in die Kräftepläne der beiden Tragwände mit einzuflechten. —

Besitzt das Fachwerk nicht nur an den Enden, sondern bei

jedem Pfostenpaar eine Querstrebe, so könnte man dafür die wagrechten Diagonalen im oberen Querverbande weglassen. Das Fachwerk der Figur 119 enthielte dann bei 28 Knotenpunkten 77 Stäbe, somit streng genommen einen zu wenig. Es ist aber trotzdem im Stande, beliebigen Angriffen zu widerstehen, weil jetzt mehr als 6 Auflagerbahnen zur Wirkung kommen.

In diesem Falle unterscheidet sich die Berechnung der Stabkräfte von der vorhin beschriebenen nur dadurch, dass die oben angreifenden Kräfte jetzt nicht vom oberen Querverband aufgenommen werden können, sondern durch Vermittlung der Pfosten und Querstreben auf die untere Gurtung übergehen müssen. Dass hierdurch in der Regel der gesamte Materialverbrauch der Brücke grösser ausfällt als bei der zuerst besprochenen Anordnung, wird bei näherer Prüfung bald erkannt.

Ebenso könnte man statt der oberen die unteren schiefen Streben entfernen, ohne dass das Fachwerk unstabil würde.

Bringt man aber beide Arten der Verstrebung, obere und untere Windstreben und Querstreben, gleichzeitig an, so wird das Fachwerk statisch unbestimmt. Ein Bauwerk nach Art der Figur 119 enthält in diesem Falle 5 überzählige Stäbe. Ein Teil der oberen Winddrücke wird jetzt durch die horizontalen Streben, der andere durch die Querstreben aufgenommen; unter Umständen kann sogar umgekehrt ein Teil des unteren Winddruckes auf das obere Windfachwerk übergehen.

Soll hier eine genaue Berechnung der Stabkräfte durchgeführt werden, so benützt man wohl am besten das Gesetz der virtuellen Verschiebungen. Dabei verfährt man genau so, wie es in der Nummer 35 beschrieben ist, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt alle Kräftepläne und Kräftediagramme räumlich werden.

Aussergewöhnliche Schwierigkeiten bietet diese Arbeit keine; doch ist sie höchst mühsam und zeitraubend, namentlich wenn nicht einfache Streben sondern Kreuze vorhanden sind. Das Fachwerk der Figur 119 besitzt, wenn jedes Feld eine einzige Diagonale erhält, 5 überzählige Stäbe. Verwendet man aber für die wagrechte und für die Querverstrebung Kreuze, so steigt deren Zahl auf 24. Ebenso viele Kräftediagramme sind zu zeichnen und ebenso viele Gleichungen aufzulösen, wenn man genau rechnen will. Man behilft sich deshalb stets mit Näherungswegen, oder man verlässt sich auf einfaches Schätzen.

Neben den verschiedenen Näherungsverfahren, welche in Büchern und Zeitschriften dargeboten werden, mag hier für Parallelträger das folgende Platz finden. Es schliesst sich in der Hauptsache an das Verfahren an, welches Ingenieur *M. Koechlin* in seinem reichhaltigen Buche *„Applications de la Statique Graphique“* eingeschlagen hat, und stützt sich auf die Voraussetzung, die Querkreuze seien so stark, dass die Querrahmen ihre rechteckige Gestalt vollkommen beibehalten.

Wir zerlegen zunächst den gesamten, auf die Brücke treffenden Winddruck W in eine gleich grosse Kraft, die in der Mitte zwischen beiden Windfachwerken liegt, und in ein Kräftepaar oder Drehmoment Ww.

Die erstere Kraft wird zur Hälfte auf die oberen, zur Hälfte auf die unteren Windstreben übergehen. Die seitliche Ausbiegung der beiden wagrechten Fachwerke hängt nämlich hauptsächlich von der Stärke der Gurtungen und nur in geringem Masse von der Stärke der Windstreben ab. Selbst wenn die Windstreben oben und unten ungleich stark sind, darf man diese Ausbiegung der Belastung proportional setzen. Wenn aber die Querrahmen, wie vorausgesetzt wird, vollkommen steif sind, so biegen sich die beiden wagrechten Wände um gleich viel aus. Jede von ihnen hat somit die Last $\frac{1}{2} W$ zu tragen.

Hieraus ergeben sich in einfacher Weise die in den Gurtungen, Windstreben und Endkreuzen auftretenden Spannungen.

Das Kräftepaar Ww sodann bewirkt eine Verdrehung der Brücke um ihre Längsaxe. Die linke Tragwand hebt sich, die rechte senkt sich; die oberen Gurtungen verschieben sich nach rechts, die untern nach links. Die gesamte Kraft, welche die lotrechten Wände verbiegt, sei V; dann leisten diese Wände mit einem Kräftepaar Vb der Verdrehung Widerstand. Wirkt in den wagrechten Wänden gleicherweise die Kraft H, so widerstehen diese mit dem Momente Hh. Setzt man äussere und innere Kräfte einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$Ww = Vb + Hh.$$

Nun handelt es sich darum, das Verhältnis von V zu H zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke berechnen wir die Durchbiegungen, welche die Wände unter den Lasten V und H erfahren. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass sich diese Lasten gleichförmig über die Spannweite verteilen. Ferner setzen wir voraus, dass alle vier Wände mit Pfosten und gekreuzten (zweiteiligen) Streben ausgestattet seien. Nennt man dann für die lotrechte Wand den Gurtungsquerschnitt F, den Querschnitt der Streben F' und deren Länge s', so ergibt sich die Einsenkung in der Brückenmitte, wie sich aus den Betrachtungen über elastische Formänderungen leicht ableiten lässt,

$$e_v = \frac{5}{192} \frac{V l^3}{F h^2 E} + \frac{V l \, s'^3}{16 \, F' \, h^2 f E}.$$

Dieser Ausdruck gilt jedoch nur, wenn sich die Wand unabhängig einsenken kann. In der Wirklichkeit wird diese Einsenkung durch die Steifigkeit der wagrechten Wände gehemmt. Während nämlich die Last V in der unteren rechten Gurtung einen Zug hervorruft, erzeugt die Last H in der-

selben Gurtung einen Druck. Ersterer ist proportional $\frac{V}{h}$, letzterer proportional $\frac{H}{b}$, die wirklich auftretende Spannung somit proportional $\frac{V}{h} - \frac{H}{b}$.

Um diesen Umstand zu berücksichtigen, müssen wir im ersten Gliede des obigen Ausdruckes, welches von der Formänderung der Gurtung herrührt, $\frac{V}{h}$ durch $\frac{V}{h} - \frac{H}{b}$ ersetzen. Dann ergibt sich

$$e_v = \frac{5\,(Vb - Hh)\,l^3}{192\,F\,b\,h^2\,E} + \frac{V\,l\,s'^3}{16\,F'\,h^2 f\,E}.$$

Vertauscht man in diesem Ausdrucke V mit H und b mit h, und ersetzt den Querschnitt F' und die Länge s' der Streben der lotrechten Wand durch die entsprechenden Werte F'' und s'' der wagrechten Wand, so erhält man die seitliche Ausbiegung dieser letzteren

$$e_h = \frac{5\,(Hh - Vb)\,l^3}{192\,F\,b^2\,h\,E} + \frac{H\,l\,s''^3}{16\,F''\,b^2 f\,E}.$$

Die beiden Einsenkungen verhalten sich aber, wenn die Querrahmen vollkommen steif sind, wie die Breite der Brücke zur Höhe, oder

$$e_v : e_h = b : h.$$

Hieraus findet man nach einiger Umrechnung das Verhältnis

$$\frac{V}{H} = \frac{F'\,h}{F''\,b} \cdot \frac{6\,F s''^3 + 5\,F'' f l^2}{6\,F s'^3 + 5\,F' f l^2}.$$

In diesem Ausdrucke bezeichnet F den Querschnitt der Gurtung, F' den Strebenquerschnitt und s' die Strebenlänge für die lotrechte Wand, F'' den Strebenquerschnitt und s'' die Strebenlänge für die wagrechte Wand; l ist die Spannweite, h die Höhe, b die Breite der Brücke und f die Fachlänge.

Setzt man beispielsweise $l = 40\,m$, $h = 4\,m$, $f = 4\,m$, $b = 3\,m$, $s' = 5{,}657\,m$ und $s'' = 5\,m$, ferner als Durchschnittswerte $F = 260$, $F' = 60$ und $F'' = 20\,cm^2$, so wird $\frac{V}{H} = 1{,}52$. Beträgt der gesamte Winddruck $28\,t$ und seine Höhe über der Mitte beider Windfachwerke $2{,}7\,m$, so ist das Drehmoment $Ww = 28 . 2{,}7 = 75{,}6\,mt$. Unter Benützung der Beziehung $Ww = Vb + Hh$ (S. 222) findet man jetzt leicht $H = 8{,}8\,t$ und $V = 13{,}4\,t$.

Das obere Windfachwerk hat demnach $\frac{1}{2} . 28 + 8{,}8 = 22{,}8\,t$, das untere $\frac{1}{2} . 28 - 8{,}8 = 5{,}2\,t$ zu tragen; die rechte, dem Winde abgewandte Tragwand wird mit $13{,}4\,t$ belastet, die linke um ebenso viel entlastet. In der rechten oberen Gurtung entsteht in der Brückenmitte die Zugspannung

$$\frac{\frac{1}{2}\,Wl}{8\,b} + \frac{Hl}{8\,b} - \frac{Vl}{8\,h} = 21{,}25\,t;$$

in der linken oberen Gurtung wirkt eine Druckspannung von der nämlichen Grösse. Für die rechte untere Gurtung findet sich ein Zug von $\frac{\frac{1}{2}\,Wl}{8\,b} - \frac{Hl}{8\,b} + \frac{Vl}{8\,h} = 25{,}42\,t$; dieselbe Kraft wirkt links unten auf Druck. Die Endkreuze endlich haben eine Kraft von $\frac{1}{4}\,W + \frac{1}{2}\,H = 11{,}4\,t$ aufzunehmen und auf die Stützpunkte zu übertragen.

Wir haben in diesem Beispiele den Winddruck bei belasteter Brücke im Auge gehabt. Bei unbelasteter Brücke und grösserem spezifischen Drucke werden die Verhältnisse etwas anders. Namentlich erfahren die unteren Windstreben in diesem Falle leicht eine stärkere Beanspruchung.

Sind die Tragwände nicht mit zweifachen, gekreuzten Streben, sondern mit einseitig geneigten, einfachen Streben versehen, so ist in der Formel für $V : H$ an Stelle von s'^3 zu setzen $2\, s'^3 + \frac{2\, F'\, h^3}{F^*}$, worin F^* den Querschnitt der Pfosten bedeutet. Ebenso ist s''^3 durch einen entsprechenden Ausdruck zu ersetzen, wenn die Windstreben nur einseitig wirken, das heisst, wenn sie nicht im Stande sind, Druckspannungen aufzunehmen.

Trifft die Ebene der oberen Windkreuze nicht ganz mit der Ebene durch die Gurtungsschwerpunkte zusammen, so werden die Pfosten der Tragwände in der Längsrichtung der Brücke auf Biegung in Anspruch genommen und ein Teil der auf die oberen Gurtungen treffenden Spannungen geht jetzt auf die unteren über.

55. Kräfteplan eines kuppelförmigen Fachwerkes.

(Tafel 6.)

Um den Weg zu zeigen, der bei einem complicirteren, jedoch statisch bestimmten, räumlichen Fachwerke zur Ermittlung der inneren Kräfte einzuschlagen ist, haben wir auf der Tafel 6 den Kräfteplan eines eisernen Kuppelfachwerkes von 10 *m* Durchmesser ausgeführt. Wir folgen dabei der Hauptsache nach den Abhandlungen von Ingenieur *A. Foeppl* in der Schweizerischen Bauzeitung 1883—85.

Die Oberfläche der Kuppel ist kugelförmig gedacht; doch lässt sich das nachstehend beschriebene Verfahren ohne jede Abweichung auch auf andere Rotationsflächen anwenden, und Oberflächen, welche nicht durch Rotation einer Mantellinie entstanden sind, verlangen nur bei der Behandlung der lotrechten Belastungen ein anderes Verfahren.

Um die Tafel nicht unnötig mit Figuren zu überladen, haben wir eine Kuppel mit bloss acht Rippen und drei Stockwerken nebst einer Laterne gewählt. Die Zahl der Knotenpunkte beträgt 40, die Zahl der Stäbe 96, die Zahl der Auflagerbahnen (da die acht Fusspunkte vollständig fest gedacht werden) $3 . 8 = 24$; es ist mithin die Bedingung $s = 3\, k - a$ erfüllt. Wir setzen voraus, dass zwar jedes Feld zwei sich kreuzende Diagonalen enthalte, dass jedoch von diesen stets nur die auf Zug wirkende zu zählen sei.

Am besten trennt man die verschiedenartigen Belastungen von-

einander und behandelt das Eigengewicht, die Schneelast und den Winddruck gesondert. Ersteres haben wir gleich 120 *kg* auf den Quadratmeter Oberfläche, das Schneegewicht gleich 80 *kg* auf den Quadratmeter Grundfläche und den Winddruck bei normalem Auffallen gleich 150 *kg* angenommen. Die Richtung des letzteren ist der Einfachheit halber horizontal vorausgesetzt; bei geneigter Richtung würden wahrscheinlich manche Kräfte etwas grösser, andere kleiner ausfallen.

Da die Kuppelringe regelmässige Polygone darstellen, so gestaltet sich die Behandlung der verticalen Belastung höchst einfach. Die Spannung in ein und demselben Ringe ist constant und zwei zusammenstossende Ringkräfte setzen sich zu einer horizontalen, durch die Kuppelaxe gehenden Mittelkraft zusammen. Daraus folgt, dass die auf eine Rippe wirkenden Kräfte sämtlich in einer verticalen Ebene liegen. Kennt man die Knotenpunktsbelastungen, so führen daher ganz einfache Zerlegungen zum Ziel.

a) Eigengewicht.

Das auf die Knotenpunkte entfallende Eigengewicht ist bei kugelförmiger Oberfläche der Höhe der entsprechenden Zone proportional. Da das erste Stockwerk 2,2 *m*, das zweite 1,75 *m* hoch ist, so trifft auf den untersten Ring (13—16) eine Oberfläche von $(\pi . 10) \frac{2,2 + 1,75}{2} = 62,1\ m^2$, auf den einzelnen Knotenpunkt somit ein Gewicht von $^1/_8 . 62,1 . 120 = 931\ kg$. In ähnlicher Weise sind die Knotenlasten der übrigen Ringe berechnet und die Ergebnisse hierauf in der Figur 3 zu dem Kräftepolygon 4 8 12 16 vereinigt worden. Nachdem noch die Rippe 4—20, um $22^1/_2{}^0$ gedreht, in der Figur 1 strichpunktirt dargestellt war, konnte die Zerlegung beginnen.

Im Stabe 4 8 wirkt einfach die Last 4. Diese wird mit der Last 8 vereinigt und die Mittelkraft in eine horizontale und eine zu 8 12 parallele Einzelkraft zerlegt. Die letztere wird mit 12 zusammengesetzt und die Summe wiederum parallel zu 12 11 und zu 12 16 zerlegt. Dann vereinigt man 12 16 mit 16 und zerlegt horizontal und parallel zu 16 20. Um die in der Rippe wirkenden Kräfte zu erhalten, hat man somit nichts anderes zu thun, als durch die Punkte

des Kräftepolygons Parallelen zu den entsprechenden Stäben zu ziehen.

Hierauf werden im Grundriss auch die Stäbe 19 20 und 20 20′ durch Drehung um $22^1/_2{}^0$ in die strichpunktirte Lage gebracht und die Horizontalkräfte der Figur 3 parallel zu den zwei erhaltenen Richtungen zerlegt. Damit sind auch die in den Ringstäben wirkenden Kräfte bestimmt.

Sämtliche Ergebnisse sind im Grundriss (Figur 2) rechts in Zahlen beigeschrieben worden; das + Zeichen bedeutet Zug, das — Zeichen Druck.

b) Schneelast.

Ganz in der nämlichen Weise wird die Schneelast behandelt. (Figur 4). Nur muss man hier der Berechnung der Knotenlasten die Horizontalprojection der entsprechenden Oberflächen zu Grunde legen. Aus der Figur 2 entnehmen wir als Radien der Ringe die Werte 1,00 *m*, 3,06 *m*, 4,49 *m* und 5,00 *m*; hieraus folgen als Radien der massgebenden Kreisflächen 1,00 *m*, 2,03 *m*, 3,775 *m* und 4,745 *m*, ferner als Grundflächen 3,1 m^2, 12,9 m^2, 44,8 m^2 und 70,8 m^2. Die Unterschiede dieser Flächen, durch 8 dividirt und mit 80 *kg* multiplicirt, führen zu den Kräften 31 *kg*, 98 *kg*, 319 *kg* und 260 *kg*. Sie bilden das Kräftepolygon der Figur 4.

Die Bestimmung der Stabkräfte erfolgt hierauf genau so wie beim Eigengewichte.

Die Ergebnisse sind im Grundrisse der Kuppel links beigeschrieben. Beachtenswert ist, dass der Ring 5—8 in beiden Fällen auf Druck, der Ring 13—16 auf Zug in Anspruch genommen wird, während der mittlere Ring 9—12 durch das Eigengewicht Zug, durch die Schneelast dagegen Druck erleidet.

c) Winddruck.

Weit mühsamer ist die Bestimmung des Windeinflusses.

Um zunächst die angreifenden Kräfte zu finden, haben wir für jeden der in Betracht kommenden Knotenpunkte die normal zur Windrichtung gemessene Fläche ermittelt. Beispielsweise entfällt auf den Punkt 9 eine Fläche von 1,35 *m* Höhe und 2,16 *m* Breite. Der Winddruck berechnete sich daher, normales Auftreffen

vorausgesetzt, zu 150 . 1,35 . 2,16 = 437 *kg*. Diese Kraft musste normal und tangential zur Kugeloberfläche zerlegt werden. Zu diesem Zwecke haben wir im Grundrisse den Halbmesser *M* 9 in die Horizontalebene nach *M* 9* umgelegt, von 9* aus obige Kraft horizontal aufgetragen und ihre Projection auf die Richtung *M* 9* bestimmt. Eine lotrechte Linie durch 9′ ergab sodann den Anfangspunkt der Kraft 9 im Grund- und Aufriss.

Auf die gleiche Art wurden die Kräfte 10, 13 und 14 bestimmt. Ebenso wurden die Kräfte 1, 2, 5 und 6 gefunden; nur war hier kein Umlegen des Halbmessers nötig. (Streng genommen sollten die vier letzteren Kräfte ein wenig nach rechts fallen; doch darf dieser Umstand vernachlässigt werden.)

Nun folgte die Construction der Stabkräfte. Aus Symmetriegründen kann man sich hierbei auf die Hälfte des Grundrisses beschränken; auch sieht man leicht ein, dass die Diagonalen in den zur Verticalebene senkrecht stehenden Feldern (1 5′, 5 9′ etc.) spannungslos bleiben.

Wir begannen mit dem obersten Stockwerke, der Laterne. (Figur 5). Zunächst wurden die angreifenden Kräfte 1 und 2 im Grund- und Aufriss aneinandergefügt und die Kraft 1 parallel zu 1 1′ und zu 1 2 zerlegt. (Hierzu genügte der Grundriss.) Nun vereinigten wir 1 2 mit 2 und zerlegten die Mittelkraft nach 2 5, 2 6 und 2 3, und zwar bestimmten wir im Grundriss, wo 2 5 und 2 6 sich decken, zuerst 2 3 und, nachdem dieser Wert hinaufgelotet war, im Aufriss die zwei andern Kräfte. Endlich wurde 2 3 im Aufriss noch nach 3 6 und 3 7 zerlegt. Der Stab 1 5 und die rechts von 3 7 liegenden Stäbe bleiben ohne Spannung.

Die Figur 6 zeigt den Kräfteplan für das zweite Stockwerk. Der Kräftemassstab ist hier nur halb so gross. Zunächst wurde die Kraft 5 in Grund- und Aufriss aufgetragen, hieran die vom oberen Stockwerke herrührende Kraft 2 5, als (5) bezeichnet, angefügt, dann die Kraft 6 und schliesslich die Mittelkraft von 2 6 und 3 6 sowie die Kraft 3 7, als (6) und (7) bezeichnet, angeschlossen. Die Kräfte (5), (6) und (7) wurden hierbei der Figur 5 entnommen, jedoch des veränderten Kräftemassstabes wegen nur in halber Grösse.

Bei der nun folgenden Zerlegung musste vor Allem die Frage entschieden werden, welche von den Diagonalen der zweiten Zone auf Zug arbeiten. Unsere Vermutung, dass dies allgemein die gegen

den Wind fallenden sein müssten, erwies sich bald als Irrtum; nach einigen Versuchen ergab sich vielmehr, dass die Streben 5 10, 7 10 und 8 11 in Thätigkeit stehen. Infolge dessen musste die Zerlegung im Punkte 6 beginnen, wo nur 3 unbekannte Stabkräfte zusammenstossen. Die Mittelkraft von 6 und (6) wurde zuerst im Aufriss in eine horizontale und eine parallel zu 6 10 laufende Seitenkraft zerlegt. Die betreffenden Linien sind wieder ausgelöscht worden. Daraus ergab sich durch Hinunterloten die Kraft 6 10 im Grundriss, und nun konnte hier die andere Seitenkraft nach 6 5 und 6 7 zerlegt werden. Die drei neuen Kräfte wurden sodann in beiden Projectionen in der Reihenfolge 6 5, 6 10, 6 7 aneinander gereiht.

Zum Punkte 5 übergehend vereinigten wir nun die Kräfte 5, (5) und 6 5 und zerlegten deren Summe im Aufriss nach 5 9 und 5 10. Hierdurch waren zwar diese beiden Kräfte auch im Grundriss bestimmt, doch die letztere infolge ihrer steilen Richtung nur ungenau. Wir schlugen, um sicher zu gehen, den folgenden Weg ein. Es wurde (Fig. 1 und 2) der Punkt bestimmt, in welchem die Mittelkraft von 5 und (5) die Ringfläche 9—12 trifft, durch diesen Punkt und den Stab 5 5′ eine Hülfsebene gelegt und deren Schnitt mit der Ebene 9 5 10 bestimmt. Dann konnte man im Grundriss die Mittelkraft nach 5 5′ und nach dieser Schnittlinie, und hierauf die letztere Seitenkraft nach 5 9 und 5 10 zerlegen. Die hierzu benützten Linien sind wieder ausgelöscht worden.

Im Knotenpunkte 7 wurde ebenso verfahren. Durch den Punkt, in welchem die Mittelkraft von 6 7 und (7) die Ringfläche 9—12 schneidet, und durch den Stab 7 8 wurde eine Ebene gelegt, mit der Ebene 10 7 11 zum Schnitt gebracht und die Mittelkraft nach 7 8 und nach der Schnittlinie zerlegt. Die zweite Seitenkraft wurde sodann nach 7 10 und 7 11 zerteilt, worauf die drei neuen Stabkräfte 7 10, 7 11 und 7 8 bestimmt waren. Endlich wurde 7 8 noch nach 8 11 und 8 12 zerlegt.

Die Figuren 7 und 8, in welchen die Stabkräfte der zwei unteren Zonen ermittelt worden sind, bedürfen nach dem Bisherigen kaum weiterer Erläuterungen. In der ersteren sind wie oben zuerst die Kräfte 9, (9), 10, (10), (11) und (12) aneinander gereiht worden; davon stellen die eingeklammerten Zahlen die von der oberen Zone herrührenden, der Figur 6 zu entnehmenden Stabkräfte dar. So ist (9) gleich der Stabkraft 5 9, (10) die Mittelkraft von 5 10,

6 10 und 7 10, (11) diejenige von 7 11 und 8 11, und (12) gleich der Kraft 8 12. Die Zerlegung begann im Punkte 10, dann folgten die Knoten 9, 12 und schliesslich 11. Den letzteren Punkt ausgenommen, brauchte der Schnitt der gegebenen Kraft mit der unteren Ringfläche nirgends bestimmt zu werden; doch gewährte diese Bestimmung stets eine angenehme Controlle.

Hinsichtlich der Figur 8 haben wir nur zu bemerken, dass die Zerlegung der Kraft (16) ihrer Kleinheit wegen nicht mehr deutlich angegeben werden konnte. Im Uebrigen verhält sich diese Figur ganz wie die vorhergehende. —

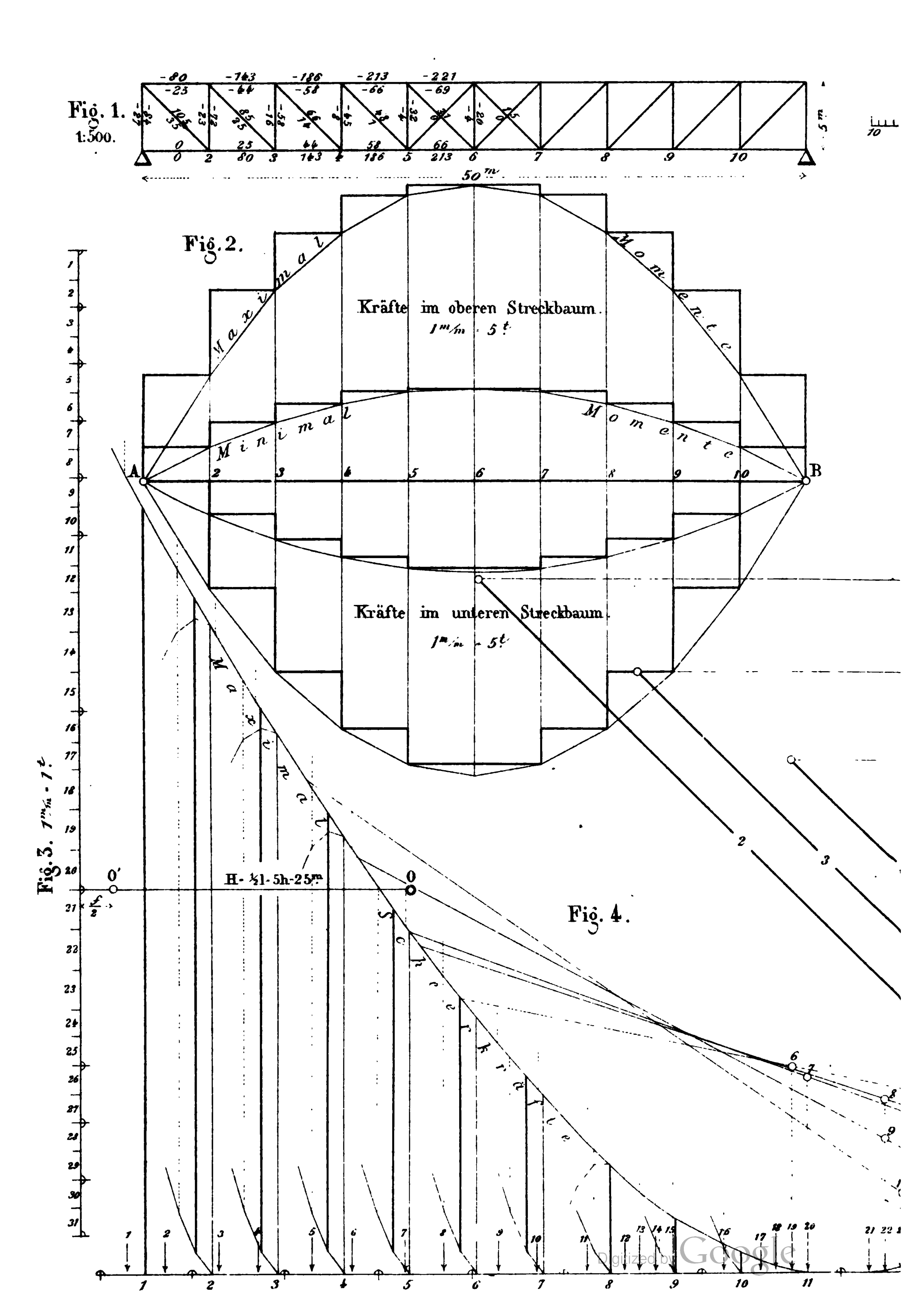
Um schliesslich aus den Projectionen der gefundenen Kräfte deren wahre Grösse zu bekommen, hat man nur die lotrecht gemessene Höhe der einen Projection rechtwinklig an die andere anzufügen und die Hypothenuse zu messen, wie es (Figur 5) für die Kraft 2 5 angedeutet ist.

Um die Inanspruchnahme der Stäbe besser übersehen zu können, haben wir in der Figur 1 sämtliche Kräfte in Zahlen beigeschrieben und überdies die gedrückten Stäbe in Grund- und Aufriss mit Schattenstrichen versehen. Der Wechsel in den Zeichen und in der Grösse der gefundenen Kräfte ist mehrfach auffallend, und es dürfte schwer halten, aus der blossen Anschauung die Beanspruchung der Stäbe auch nur ungefähr herauszulesen. Nicht einmal eine gewisse Gesetzmässigkeit lässt sich unsern Ergebnissen entnehmen.

Ein Vergleich mit den Wirkungen des eigenen Gewichtes und des Schneees ergibt, dass der Wind vielfach weit höhere Spannungen erzeugt. Selbstverständlich wären auch aus der Schneelast höhere Spannungen entstanden, wenn man sie bloss einseitig wirkend angenommen hätte. Am stärksten ist der Stab 15 19 belastet; er erleidet in jeder Beziehung Druck, und zwar durch das Eigengewicht 2080, durch die Schneelast 730 und durch den Winddruck 3240, zusammen also 6050 *kg*. Unter den Ringstäben ist 6 7 am ungünstigsten beansprucht, und zwar mit einem Drucke von 1340 + 370 + 650 = 2360 *kg*, während der in 14 15 herrschende hohe Druck durch das Eigengewicht gemildert wird. Im Uebrigen ist es nicht schwer, aus den eingeschriebenen Zahlen für jeden einzelnen Stab die *grösste* und die *kleinste* Spannung zu berechnen.

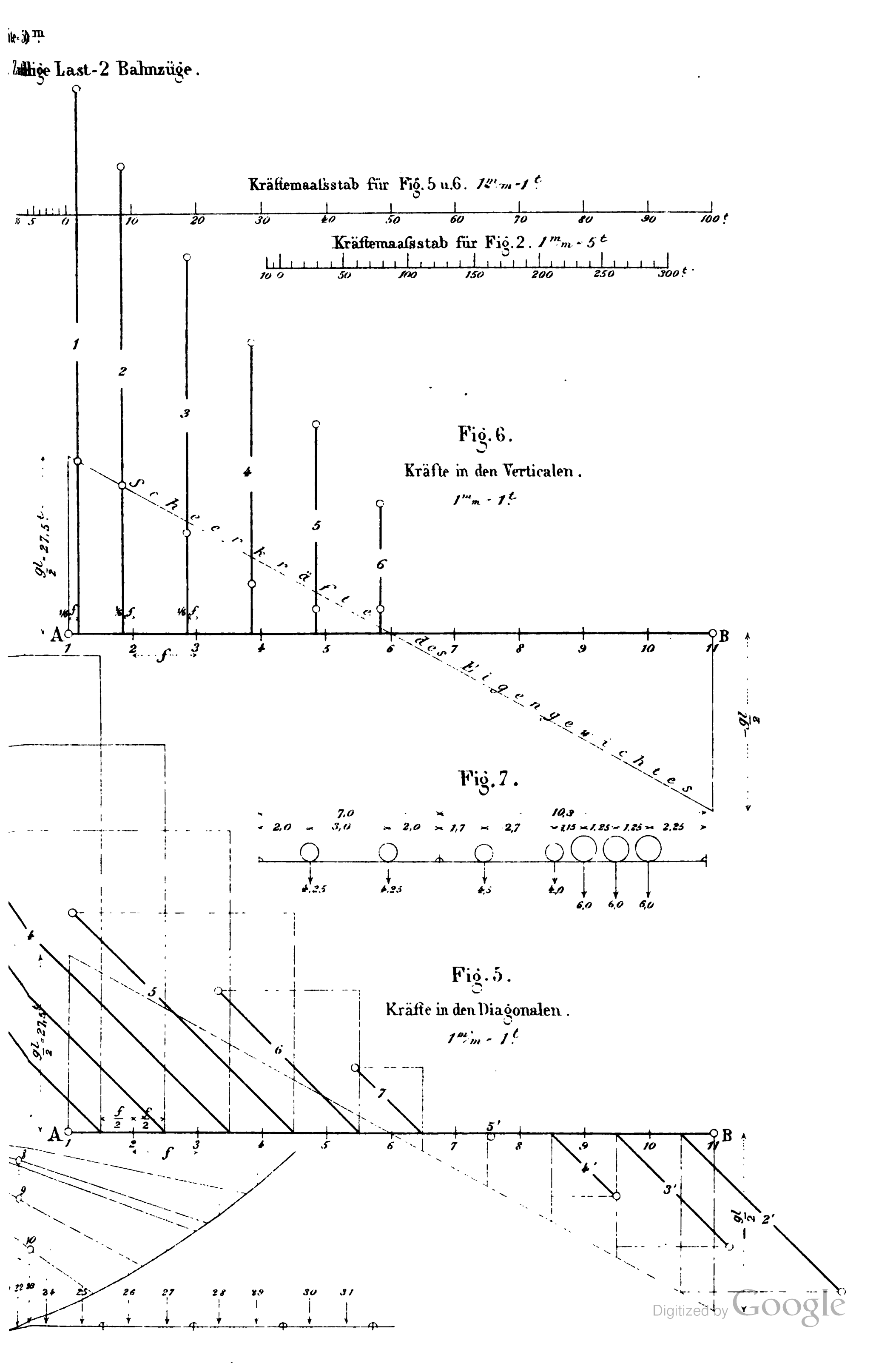
Spannweite - 5[illegible]

Eigengewicht - 1,1^t pro Meter. Zuf[illegible]



Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lithogr. Anstalt v. Wurster Randegg[illegible]

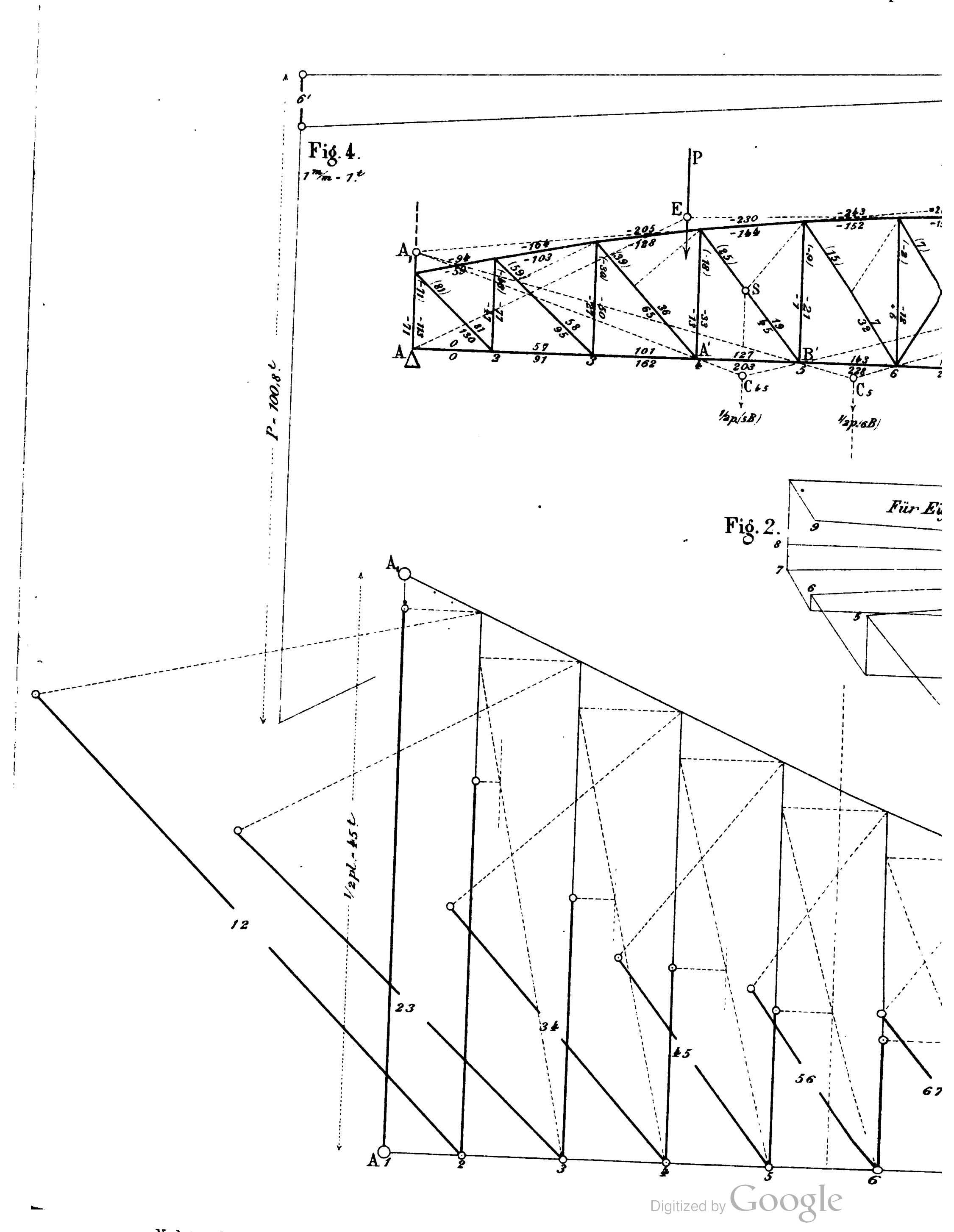


Last-2 Bahnzüge.
Kräftemaafsstab für Fig. 5 u. 6. 1mm = 1t
Kräftemaafsstab für Fig. 2. 1mm = 5t
Fig. 6.
Kräfte in den Verticalen.
1mm = 1t
Scherkräfte des Eigengewichtes
Fig. 7.
Fig. 5.
Kräfte in den Diagonalen.
1mm = 1t

KRÆFTEPLAN EINES [

Spannweite

Eigengewicht - 3,0ᵗ pro Meter.

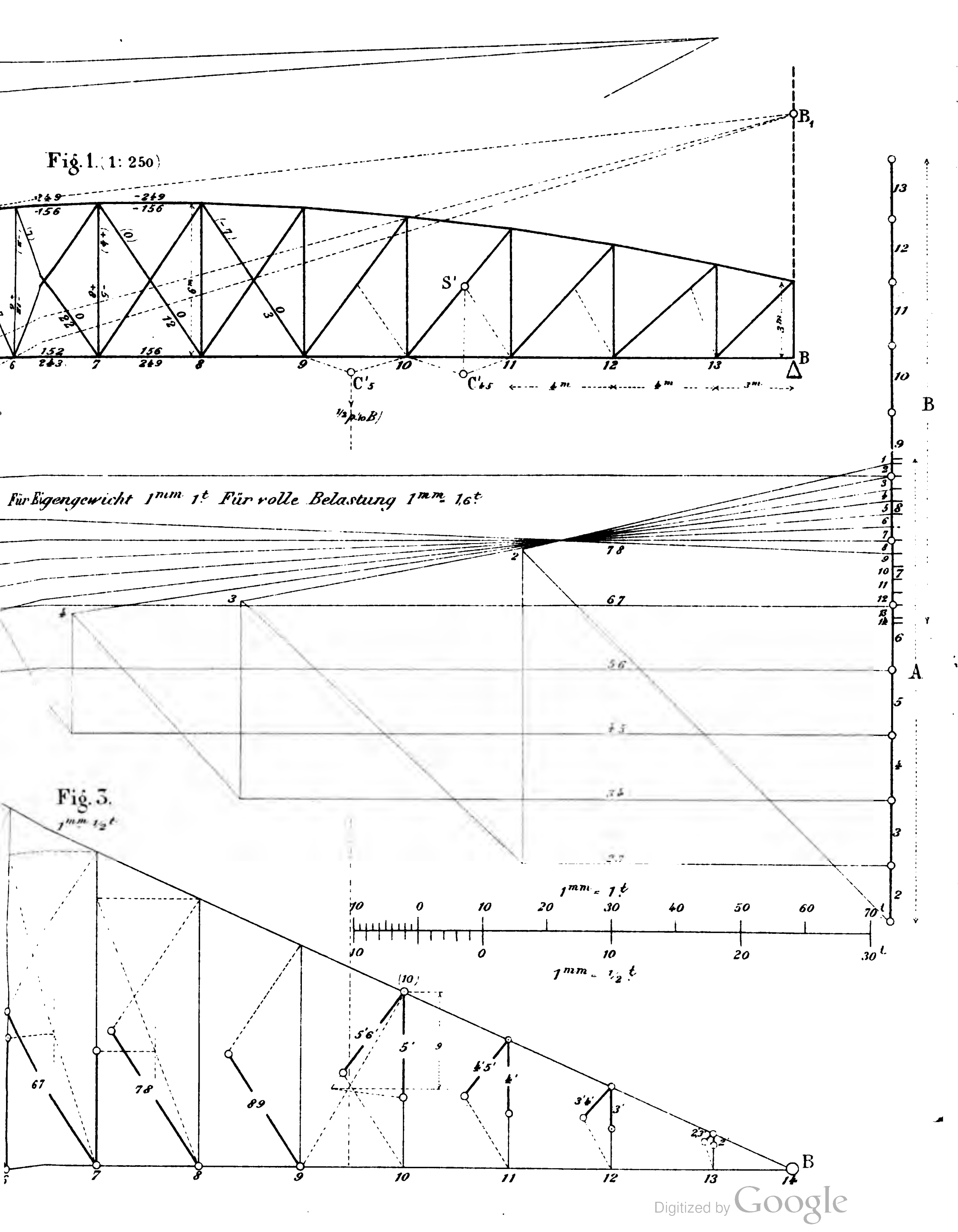


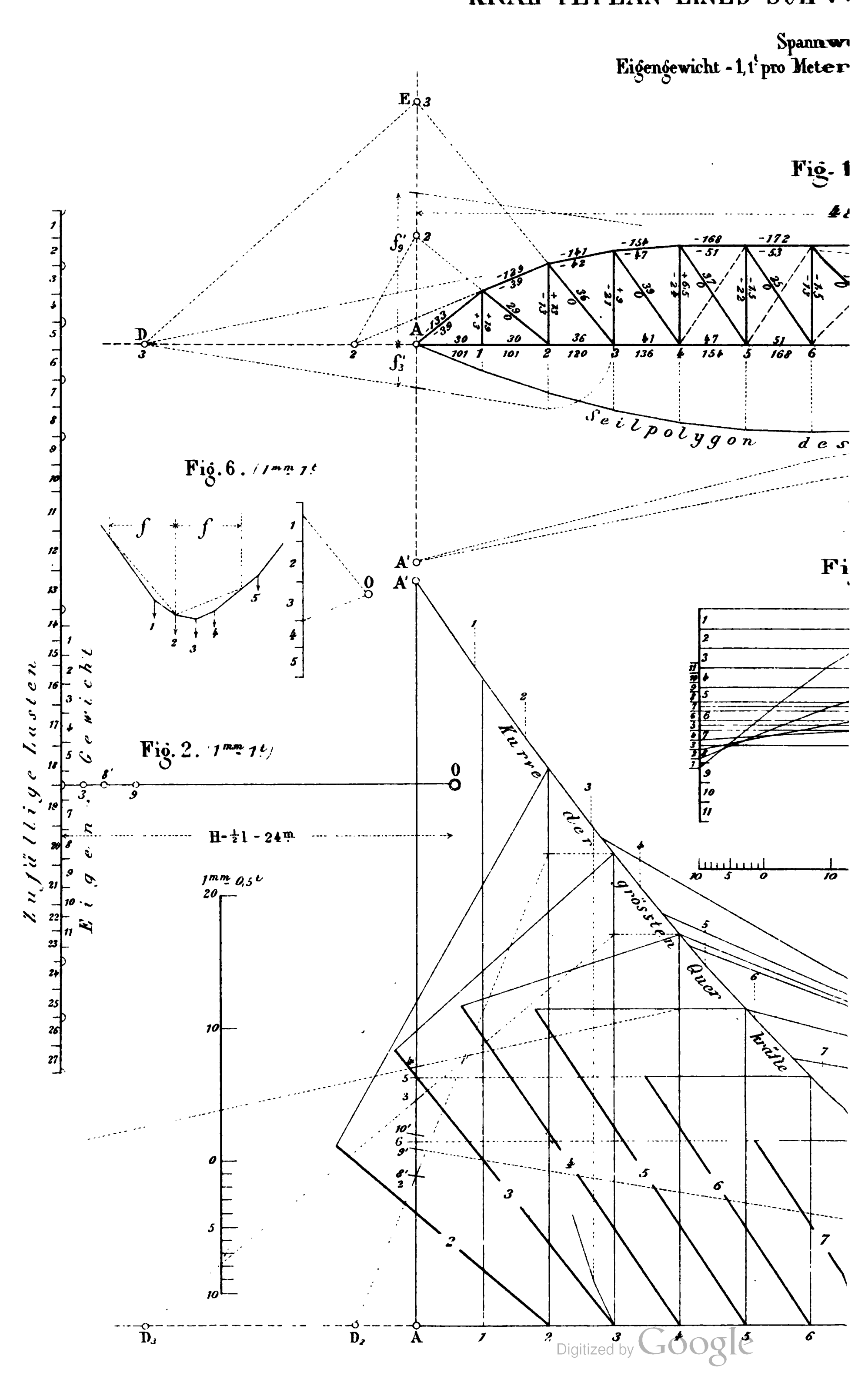
Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lithogr. Anst

Spannweite - 50 m

t pro Meter. Zufällige Last - 1,8 t pro Meter.

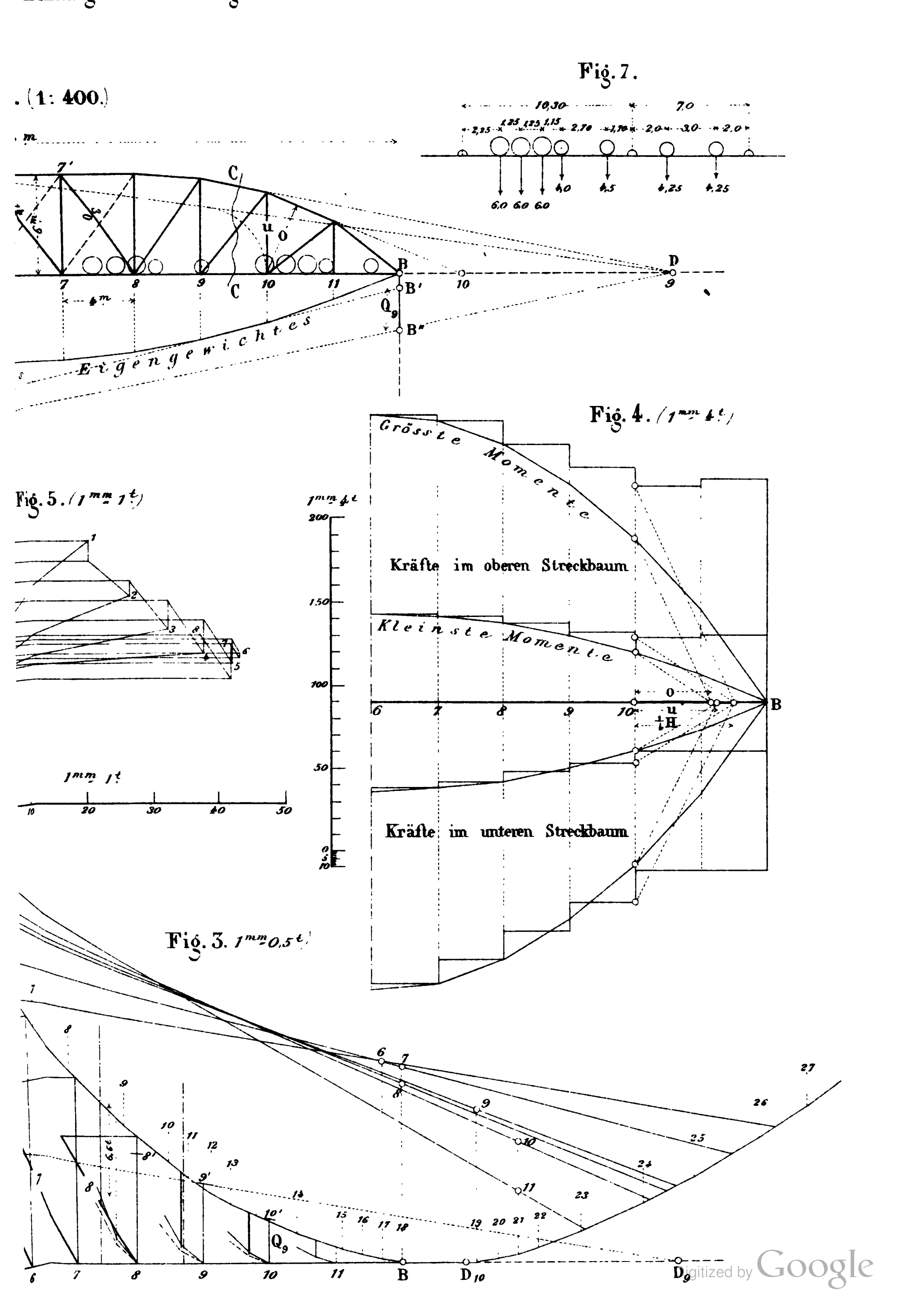




Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lithogr. Anstalt von Wurster, Ran

te - 48m
Zufällige Last - 2 Güterzüge.



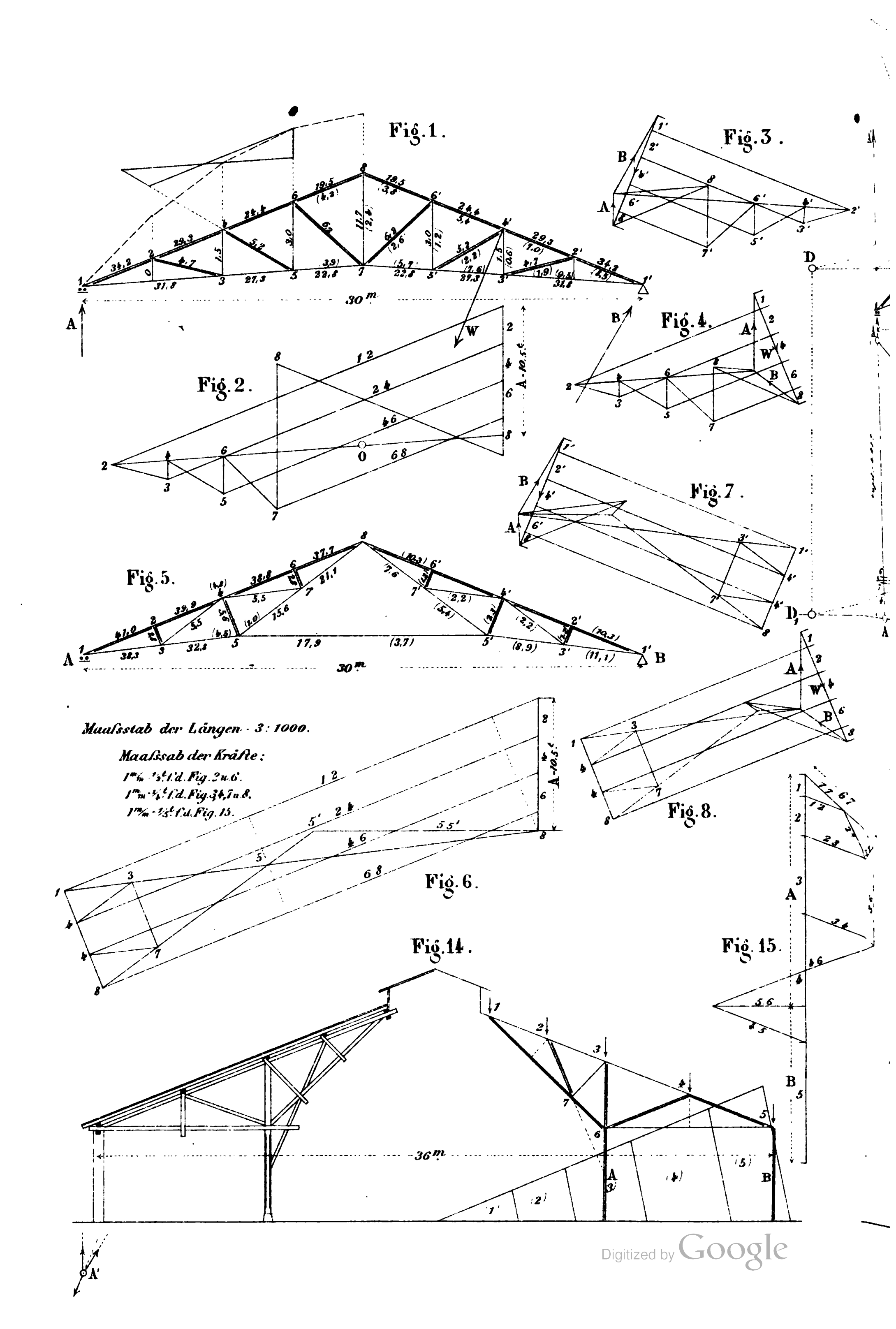
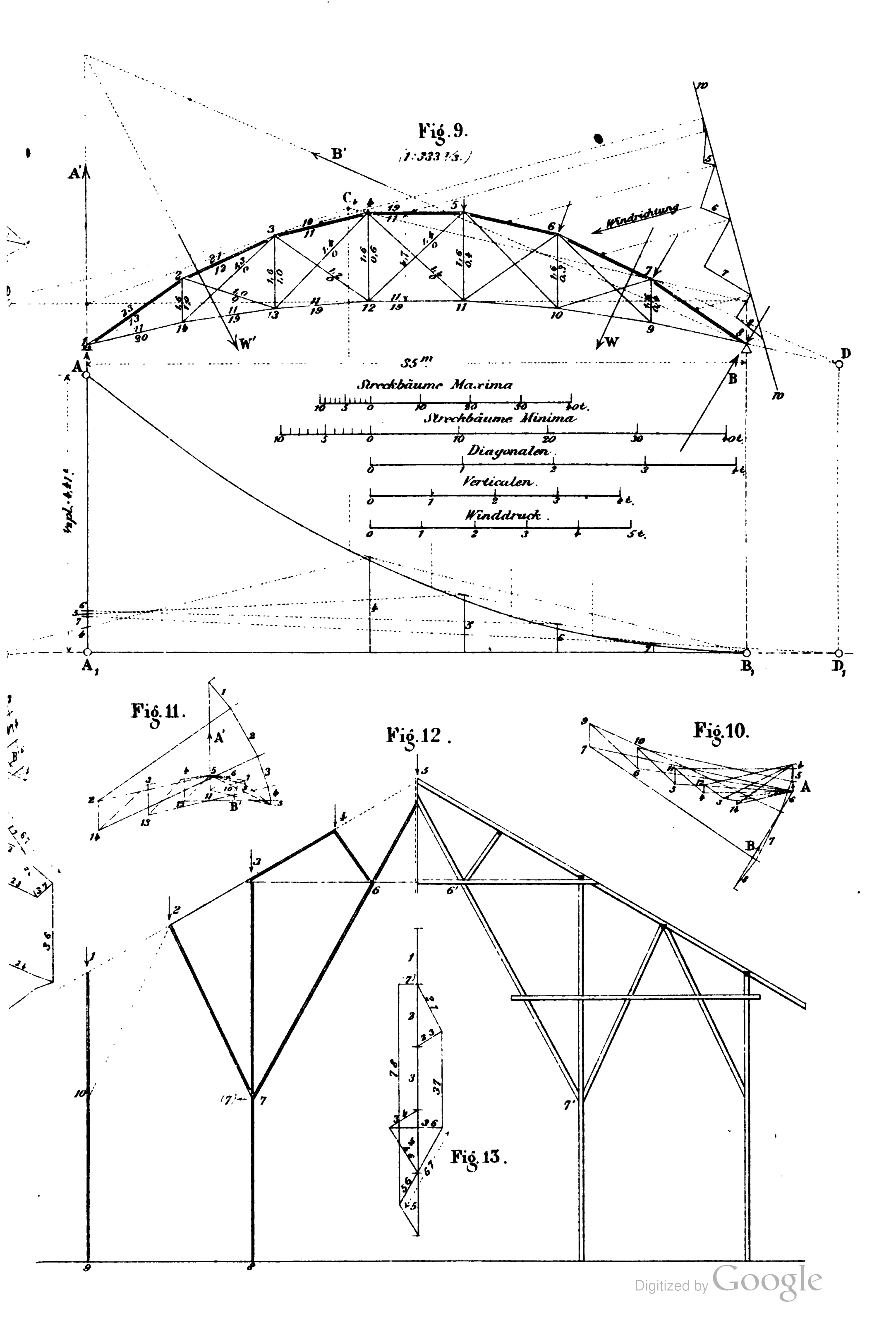
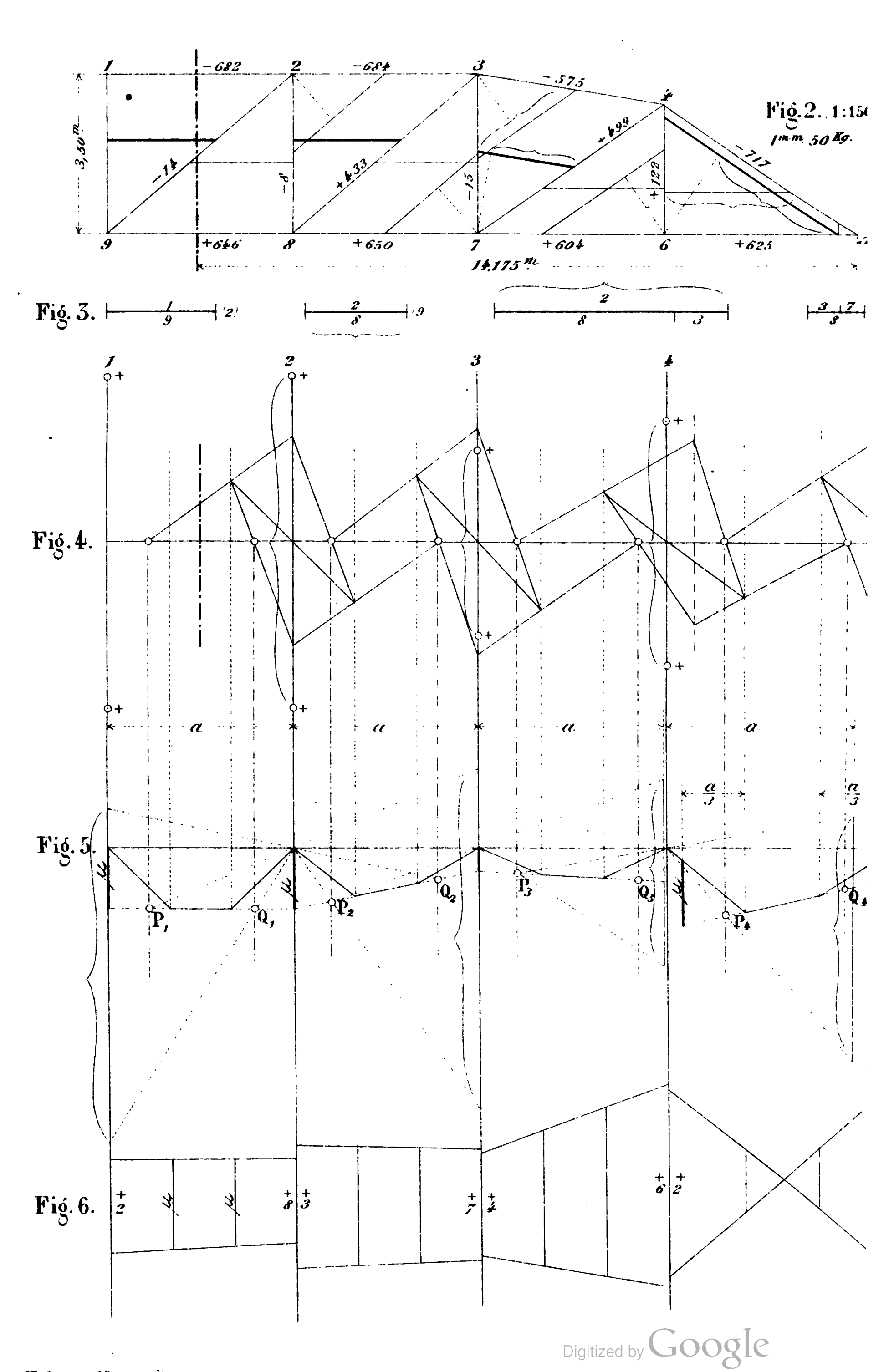


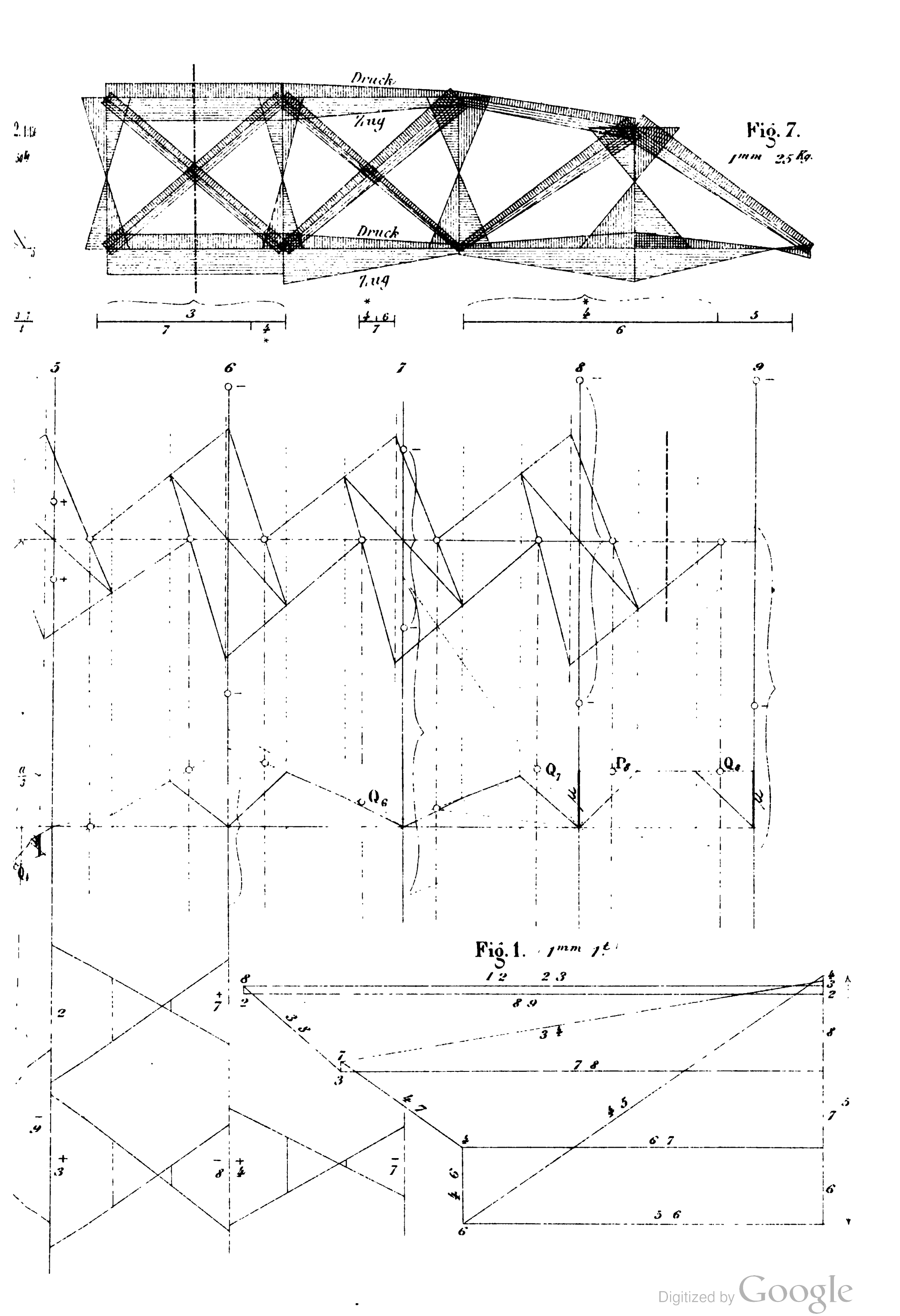
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 14.
Fig. 15.
30 m
36 m
Maafsstab der Längen · 3 : 1000.
Maafssab der Kräfte :


Fig. 9.
(1:333 1/3.)
Windrichtung
35 m
Streckbäume Maxima
Streckbäume Minima
Diagonalen
Verticalen
Winddruck
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 10.
Fig. 13.

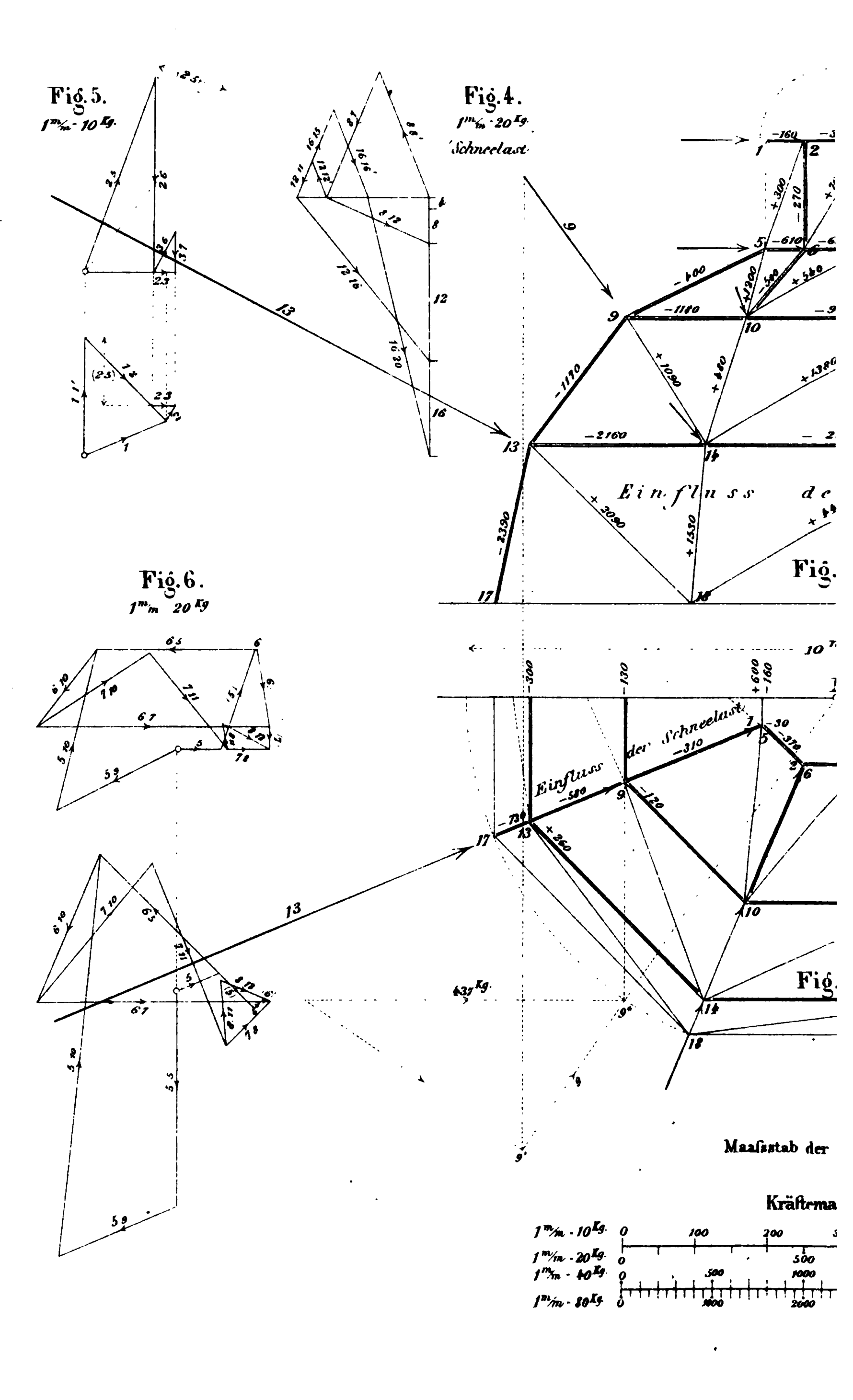


Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lithogr. Anstalt von Wurste

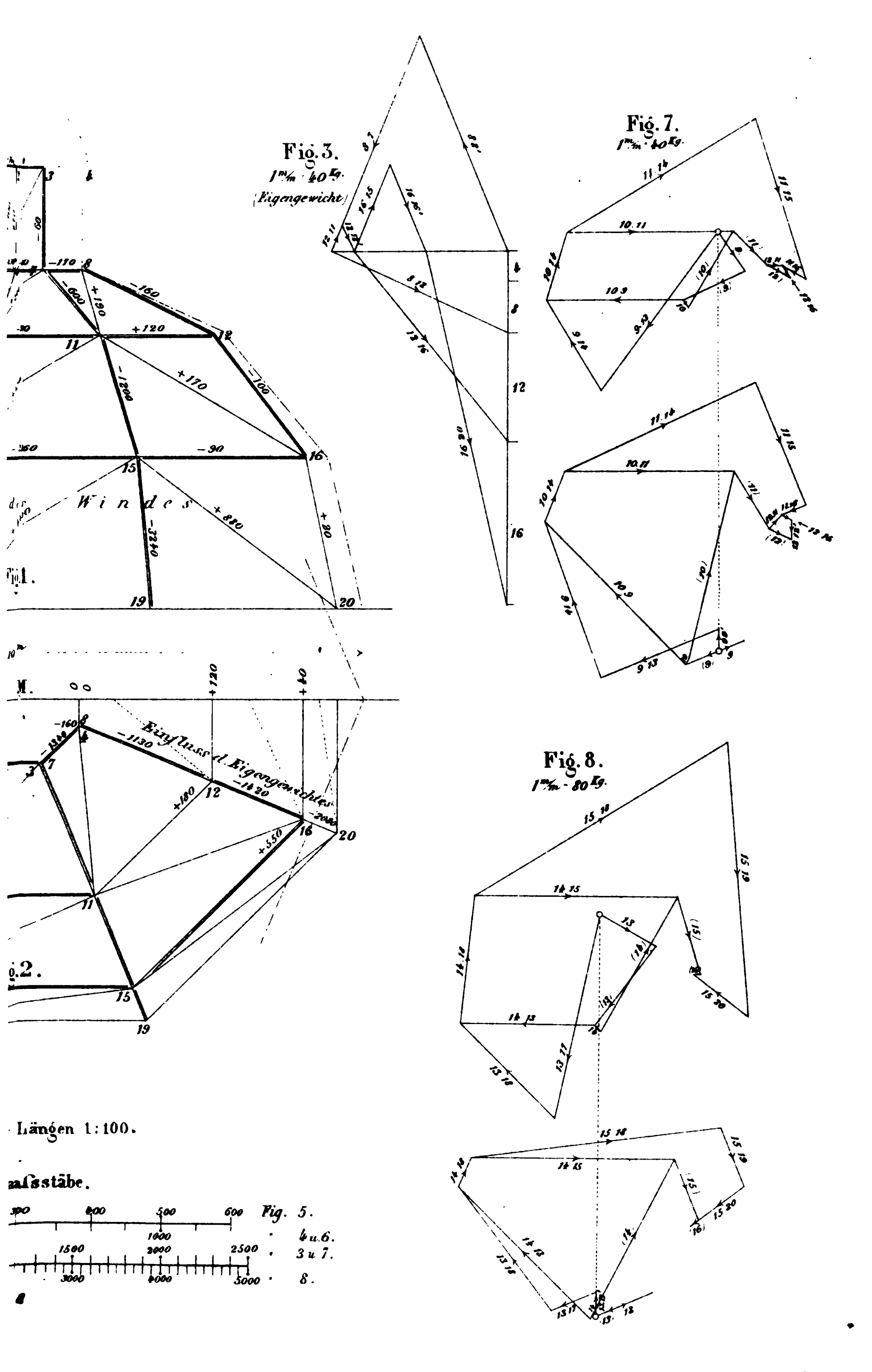


...ter, Randegger & Cº in Winterthur.



Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lithogr. Anstalt v. Wurster, R



andegger & Co. in Winterthur.